

<http://oeis.org/A210464> - F(2,2,n)

Original work by Ata Aydın Uslu – Hamdi Goktan Ozmenekse

22.01.2013

Explanation: Number of bracelets made with 2 blue, 2 identical red and n identical black beads.

Usage: Chemistry: CROSSREFS:

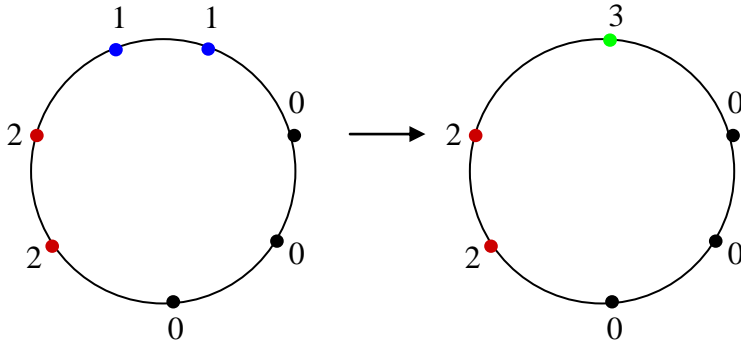
[A008054](#) [A009869](#) [A024989](#) [A008061](#) : Zeolite Codes

Maths: Circular permutations of identical objects

Soru1: 2 tane özdeş mavi 2 tane özdeş kırmızı ve 3 tane özdeş siyah boncukla kaç farklı bileklik yapılabilir.

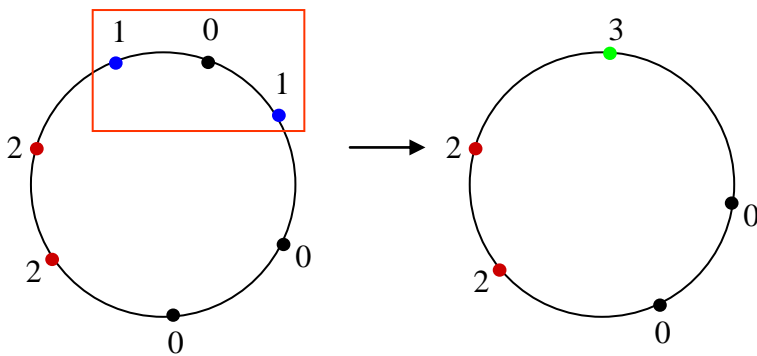
Çözüm:

2 tane özdeş mavi boncuğun yan yana olma durumu :

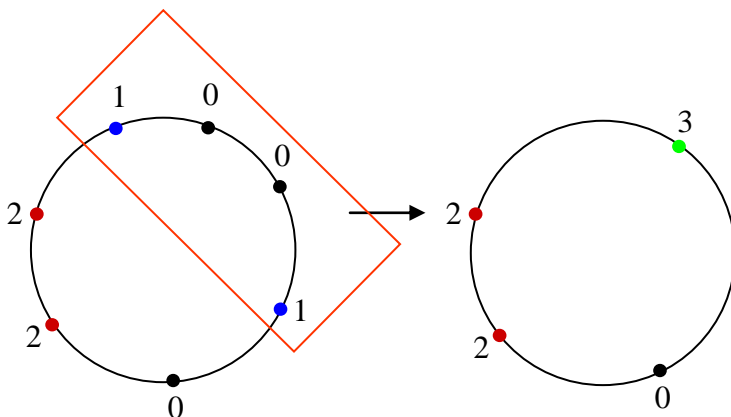


$F(1,2,3) = 6$ durum vardır.

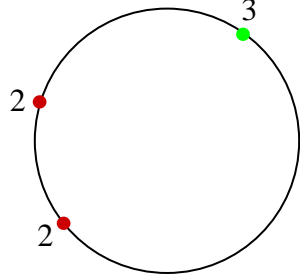
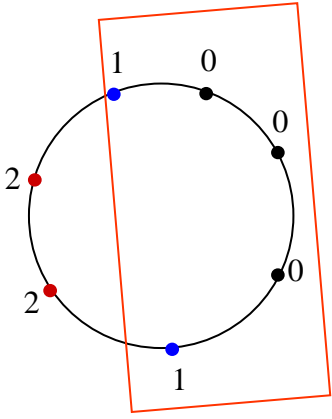
2 tane özdeş mavi boncuk arasına siyah boncuk alarak,özdeş siyah boncuk sayısını artırma durumu:



$F(1,2,2) = 4$ durum vardır.

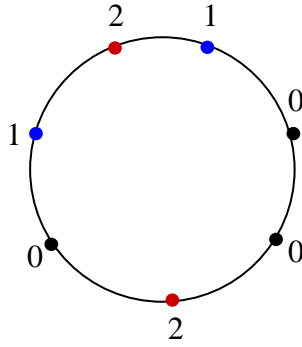
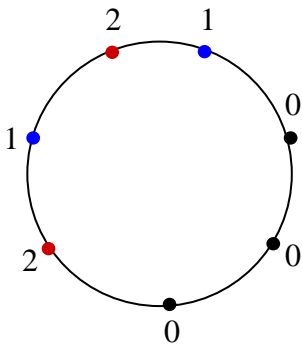


$F(1,2,1) = 2$ durum vardır.

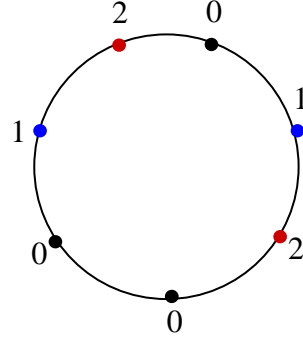
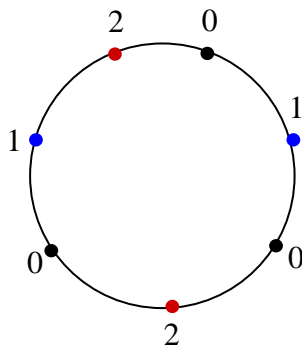
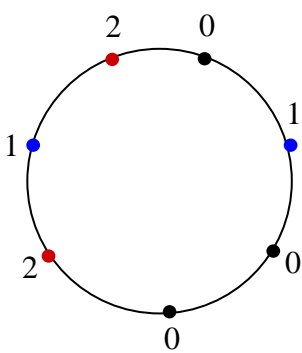


1 tane durum vardır.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı boncuk alıp siyah boncuk sayısını artırma durumu:



2 farkı durum,



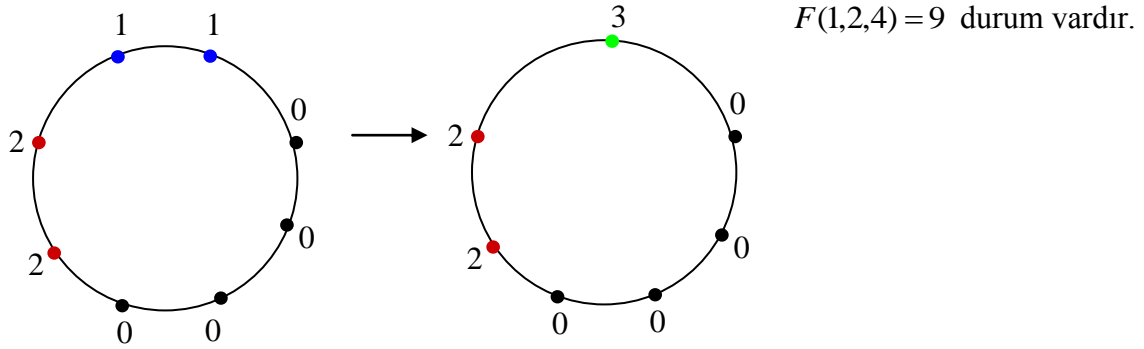
3 farklı durum vardır.

Oluşan durumları toplarsak:
 $F(2,2,3) = 6+4+2+1+2+3=18$

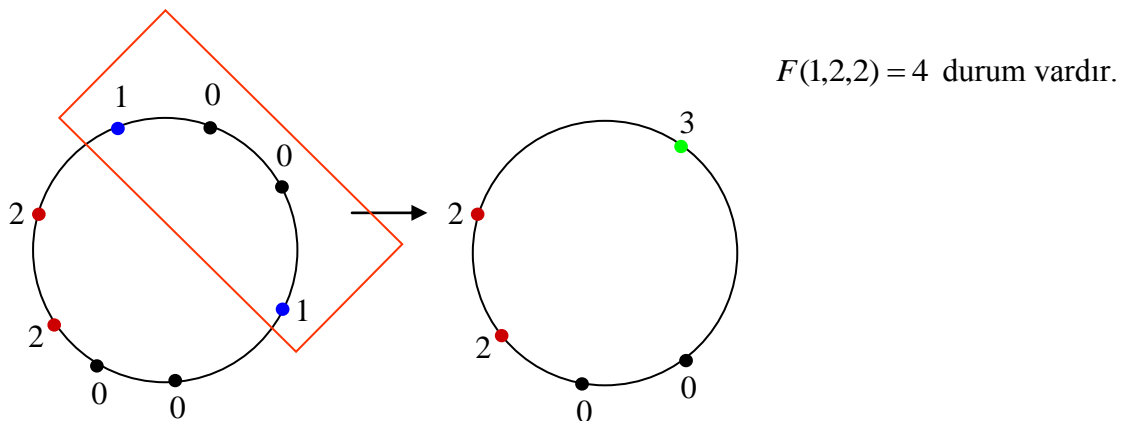
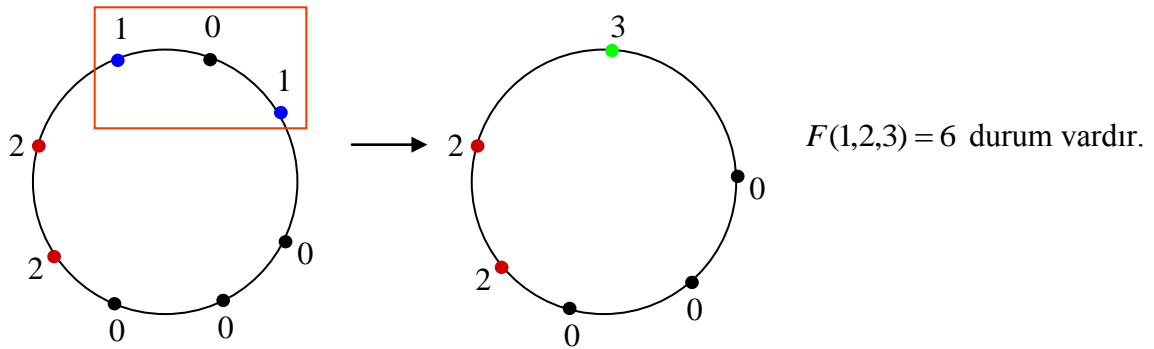
Soru 2: 2 tane özdeş mavi 2 tane özdeş kırmızı ve 4 tane özdeş siyah boncukla kaç farklı bileklik yapılabilir.

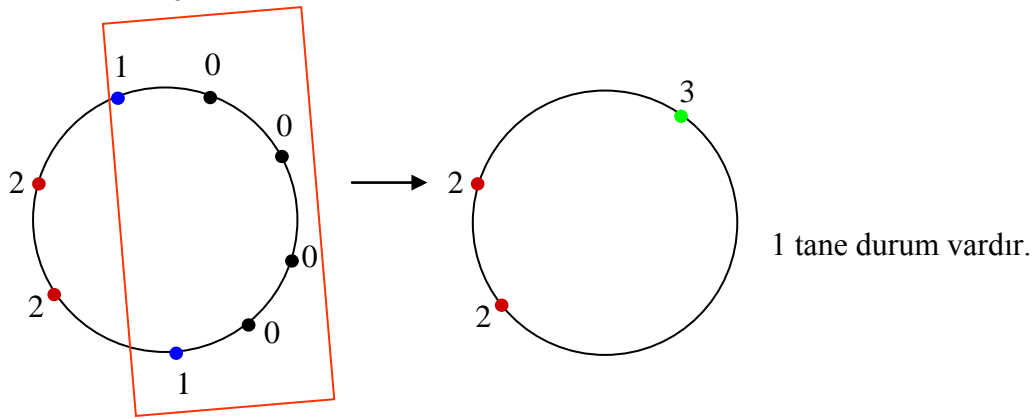
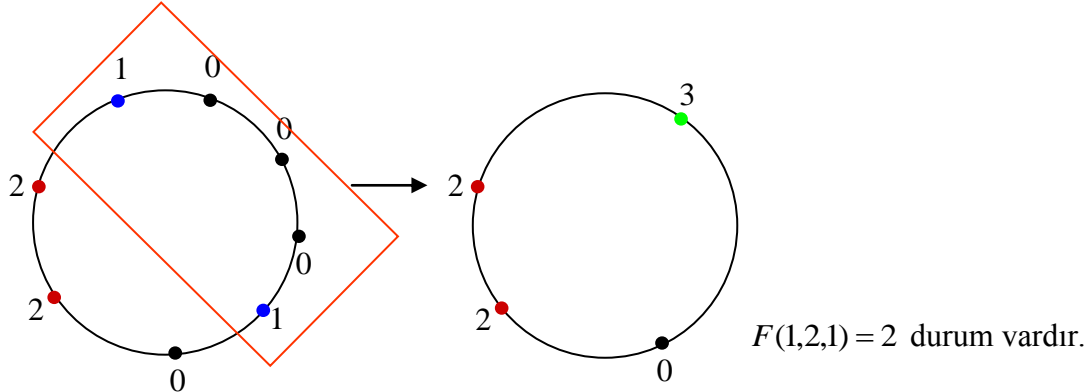
Çözüm:

2 tane özdeş mavi boncuğun yan yana olma durumu :

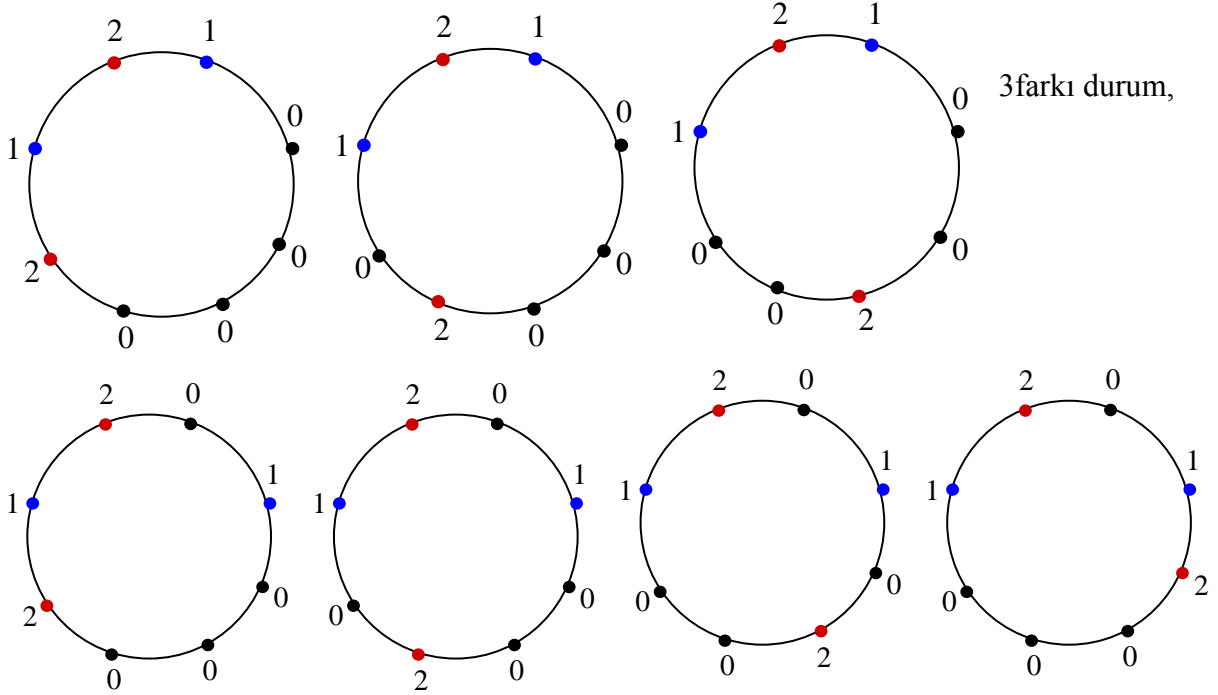


2 tane özdeş mavi boncuk arasına siyah boncuk alarak,özdeş siyah boncuk sayısını artırma durumu:

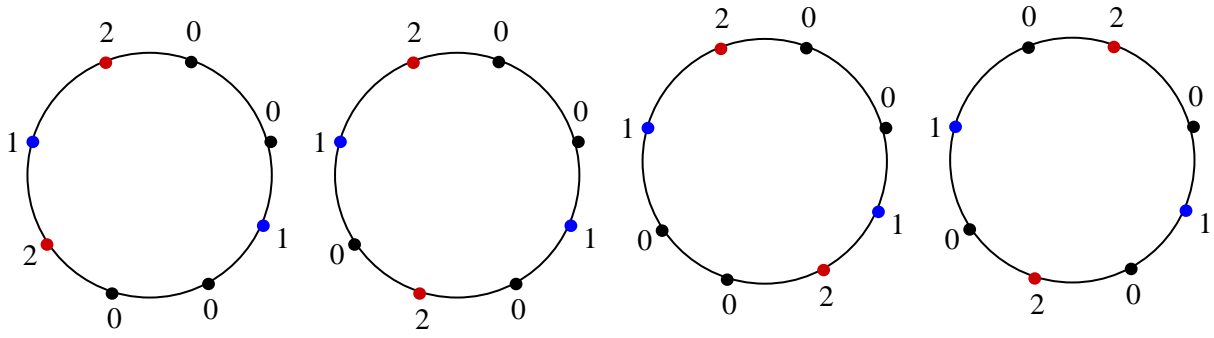




2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı boncuk alıp siyah boncuk sayısını artırma durumu:



4 farklı durum vardır.



4 farklı durum vardır.

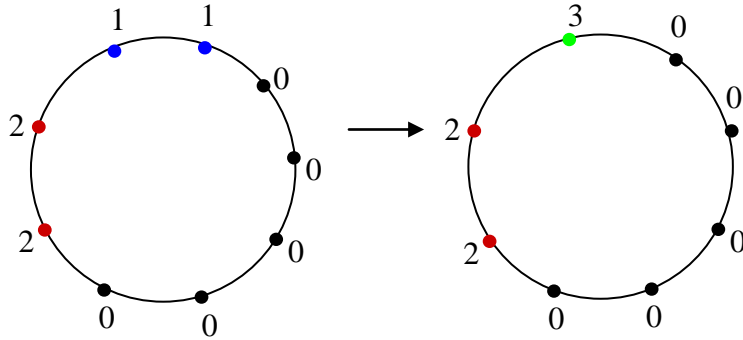
Oluşan durumları toplarsak:

$$F(2,2,4) = 9 + 6 + 4 + 2 + 1 + 3 + 4 + 4 = 33$$

Soru 3: 2 tane özdeş mavi 2 tane özdeş kırmızı ve 5 tane özdeş siyah boncukla kaç farklı bileklik yapılabilir.

Çözüm:

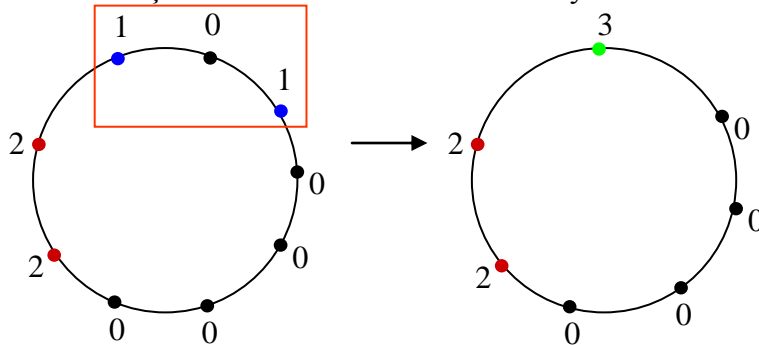
2 tane özdeş mavi boncukun yan yana olma durumu :



$$F(1,2,5) = 12 \text{ durum vardır.}$$

2 tane özdeş mavi boncuk arasına siyah boncuk alarak,özdeş siyah boncuk sayısını artırma durumu:

2 tane özdeş mavi boncuk arasına bir tane siyah boncuk alırsak,



$$F(1,2,4) = 9 \text{ durum vardır.}$$

Benzer olarak;

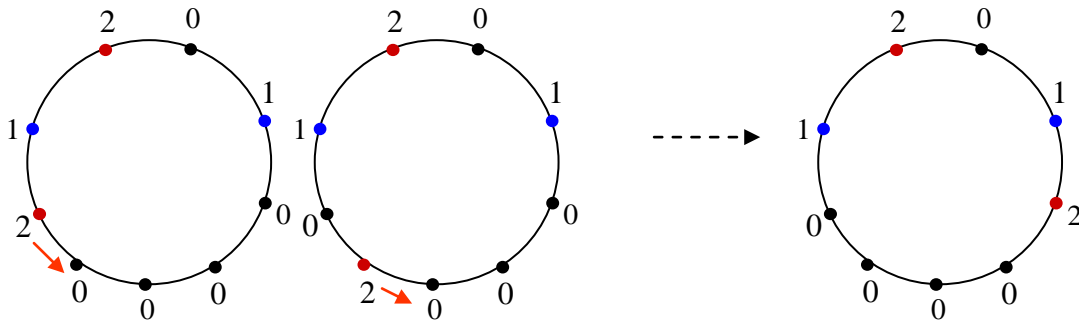
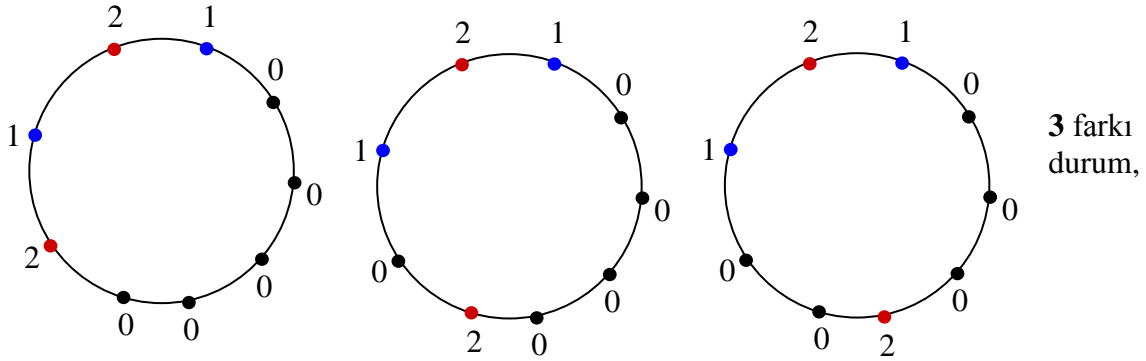
2 tane özdeş mavi boncuk arasına 2 tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,3) = 6$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına 3 tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,2) = 4$ durum vardır.

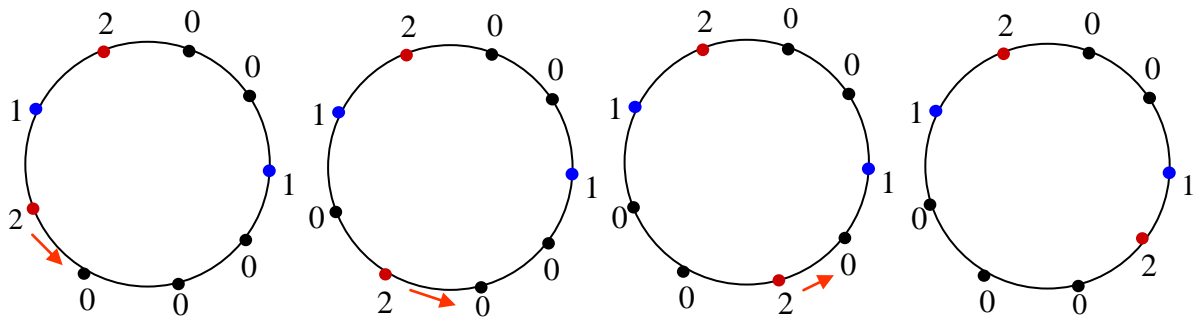
2 tane özdeş mavi boncuk arasına 4 tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,1) = 2$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına 5 tane özdeş siyah boncuk alırsak 1 tane durum vardır.

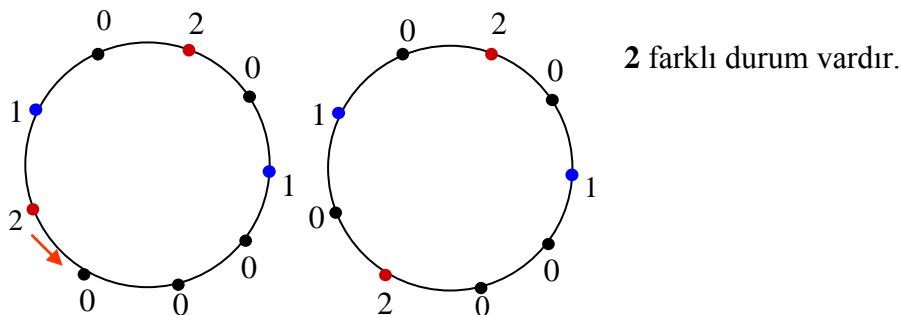
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı boncuk alıp siyah boncuk sayısını artırma durumu:



Kırmızı 5 farklı konumda olabilir.(ok yönünde hareket)



4 farklı durum vardır.



2 farklı durum vardır.

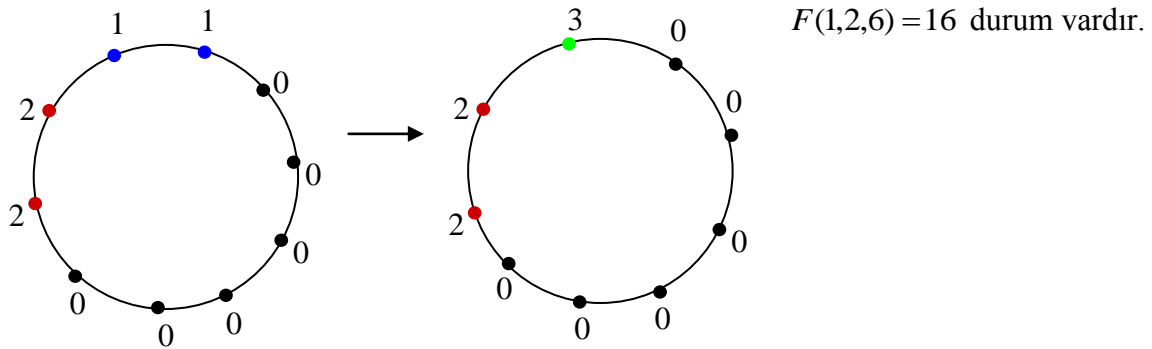
Oluşan durumları toplarsak:

$$F(2,2,5) = 12 + 9 + 6 + 4 + 2 + 1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 48$$

Soru 4: 2 tane özdeş mavi 2 tane özdeş kırmızı ve 6 tane özdeş siyah boncukla kaç farklı bileklik yapılabilir.

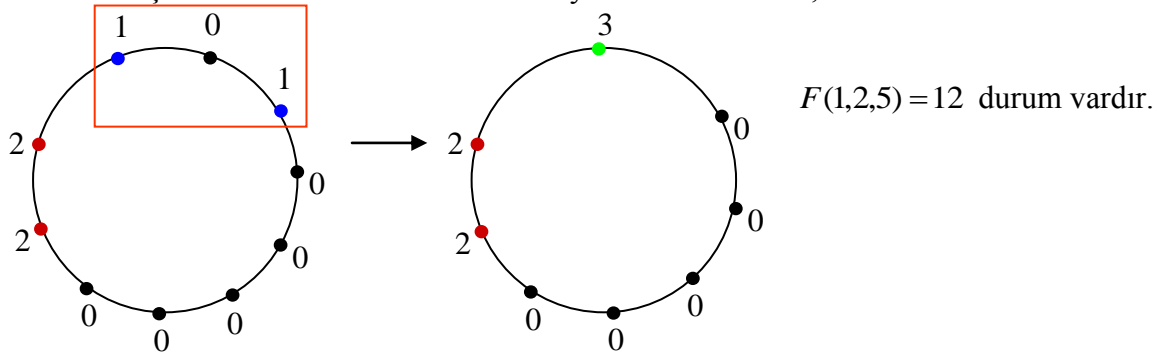
Çözüm:

2 tane özdeş mavi boncuğun yan yana olma durumu :



2 tane özdeş mavi boncuk arasına siyah boncuk alarak,özdeş siyah boncuk sayısını artırma durumu:

2 tane özdeş mavi boncuk arasına bir tane siyah boncuk alırsak,



Benzer olarak;

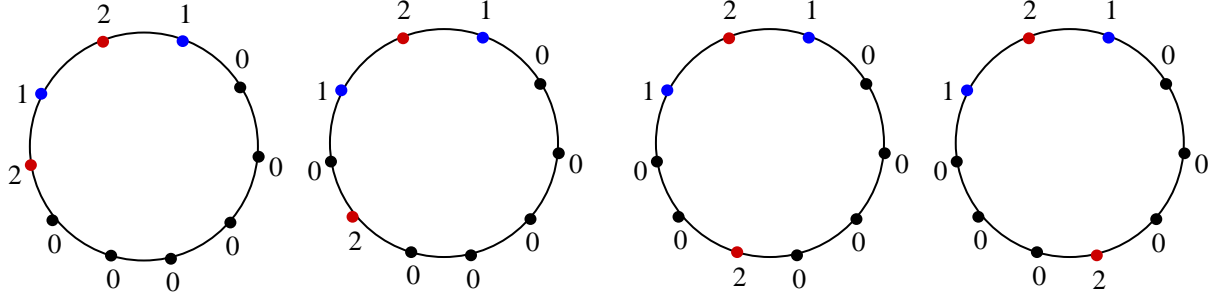
2 tane özdeş mavi boncuk arasına 2 tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,4) = 9$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına 3 tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,3) = 6$ durum vardır.

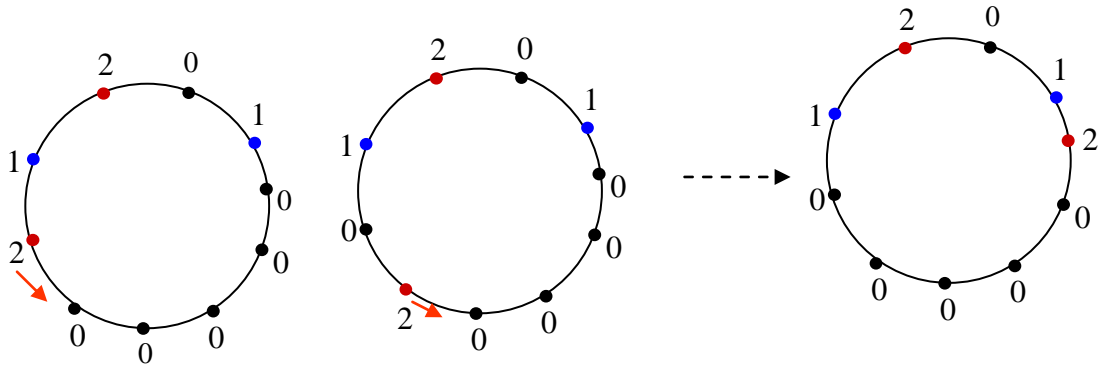
2 tane özdeş mavi boncuk arasına 4 tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,2) = 4$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına 5 tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,1) = 2$ durum vardır.

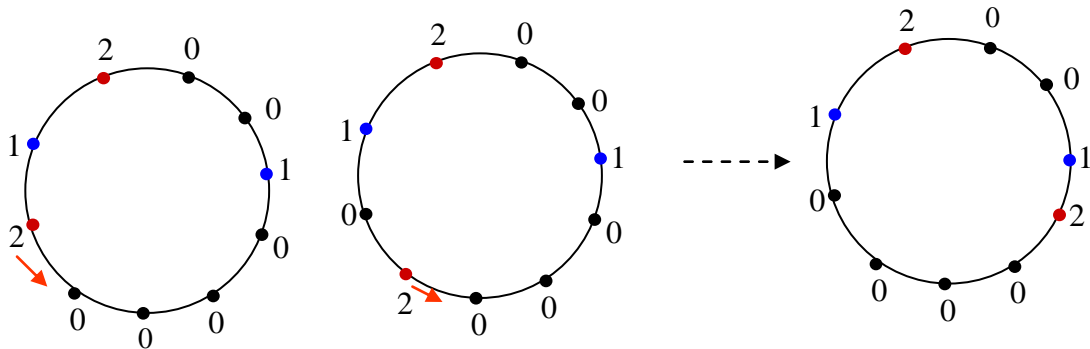
2 tane özdeş mavi boncuk arasına 6 tane özdeş siyah boncuk alırsak 1 tane durum vardır.
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı boncuk alıp siyah boncuk sayısını artırma durumu:



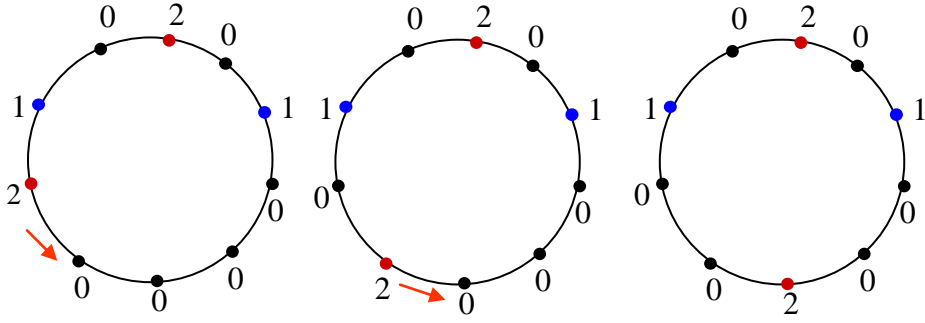
4 farklı durum,



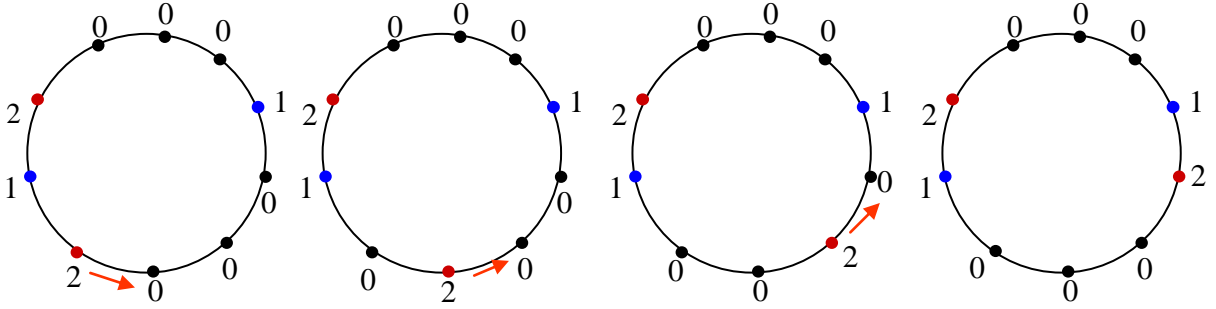
Kırmızı 6 farklı konumda olabilir.(ok yönünde hareket)



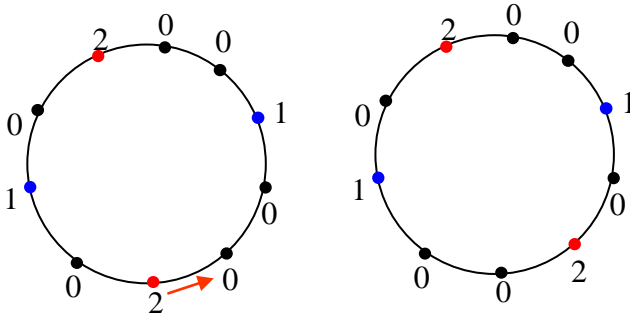
5 farklı durum vardır. (ok yönünde hareket)



3 farklı durum vardır.



4 farklı durum vardır.



2 farklı durum vardır.

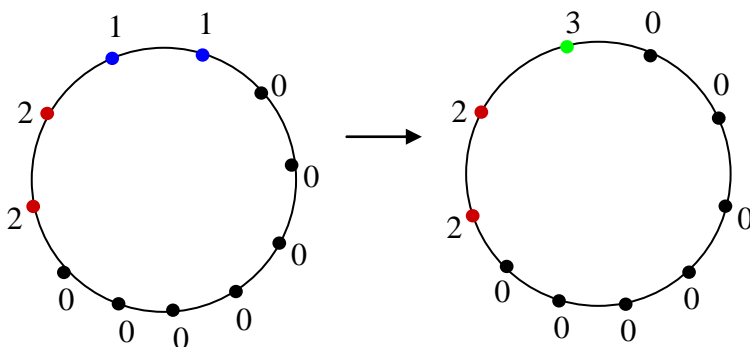
Oluşan durumları toplarsak:

$$F(2,2,6) = 16 + 12 + 9 + 6 + 4 + 2 + 1 + 4 + 6 + 5 + 3 + 4 + 2 = 74$$

Soru 5: 2 tane özdeş mavi 2 tane özdeş kırmızı ve 7 tane özdeş siyah boncukla kaç farklı bileklik yapılabilir.

Çözüm:

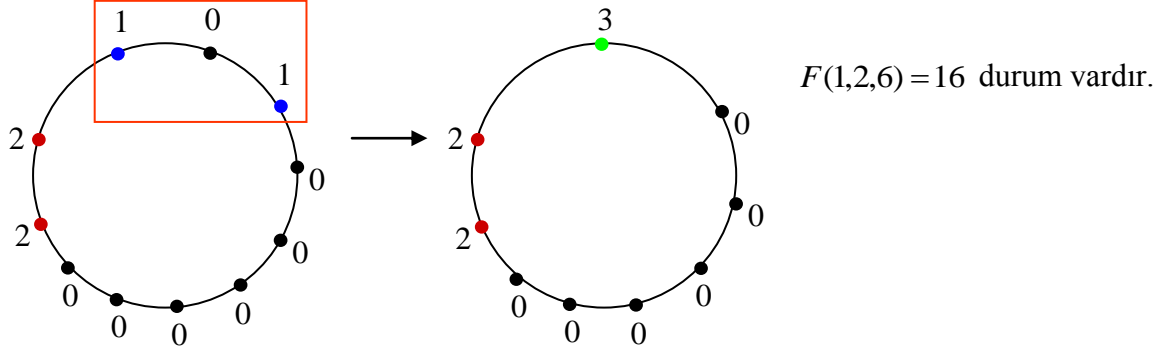
2 tane özdeş mavi boncuğun yan yana olma durumu :



$F(1,2,7) = 20$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına siyah boncuk alarak,özdeş siyah boncuk sayısını artırma durumu:

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **bir tane siyah** boncuk alırsak,



Benzer olarak;

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **2 tane siyah boncuk** alırsak $F(1,2,5) = 12$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **3 tane özdeş siyah** boncuk alırsak $F(1,2,4) = 9$ durum vardır.

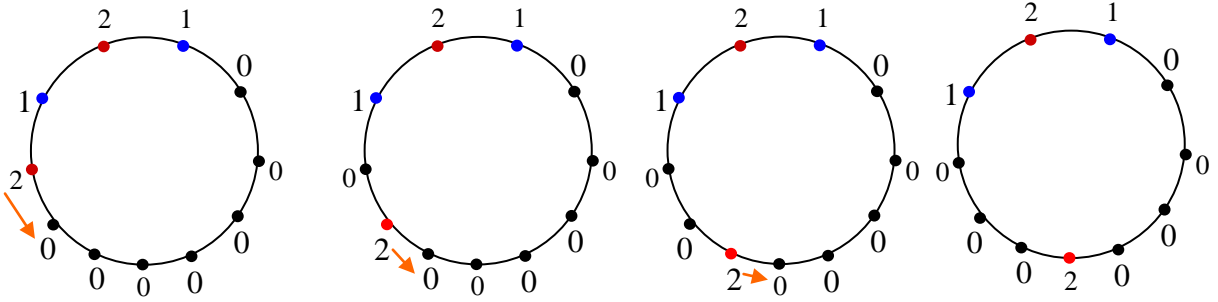
2 tane özdeş mavi boncuk arasına **4 tane özdeş siyah** boncuk alırsak $F(1,2,3) = 6$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **5 tane özdeş siyah** boncuk alırsak $F(1,2,2) = 4$ durum vardır.

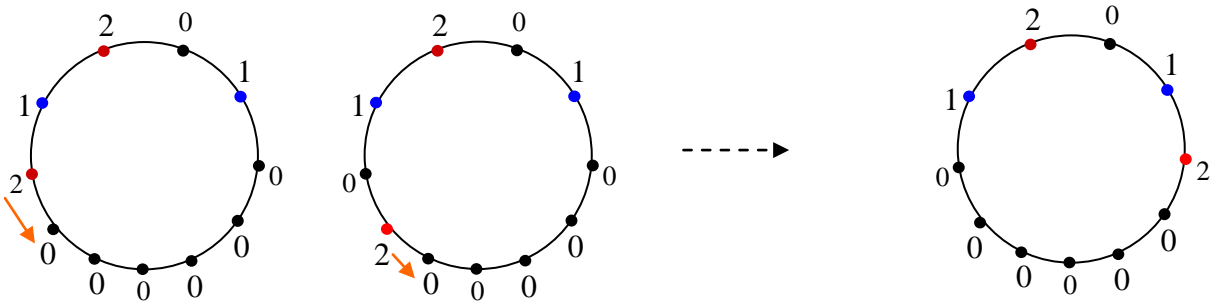
2 tane özdeş mavi boncuk arasına **6 tane özdeş siyah** boncuk alırsak $F(1,2,1) = 2$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **7 tane özdeş siyah** boncuk alırsak 1 tane durum vardır.

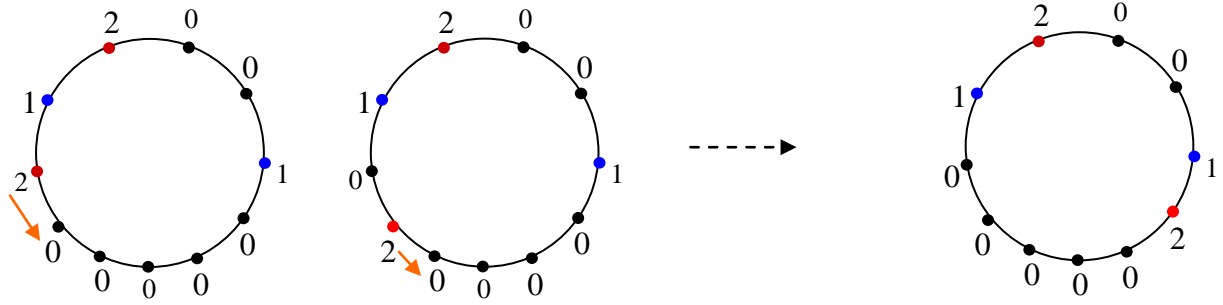
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı boncuk alıp siyah boncuk sayısını artırma durumu:



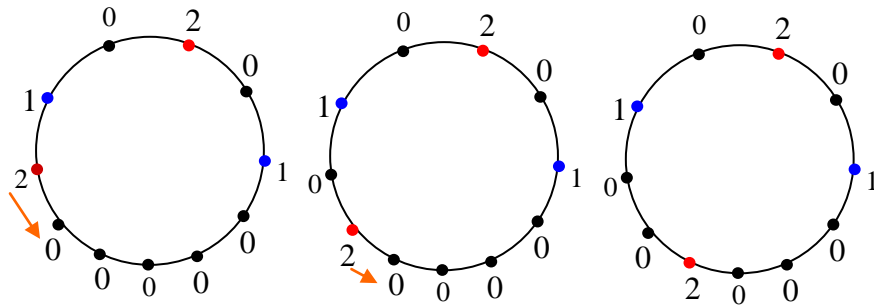
4 farklı durum,



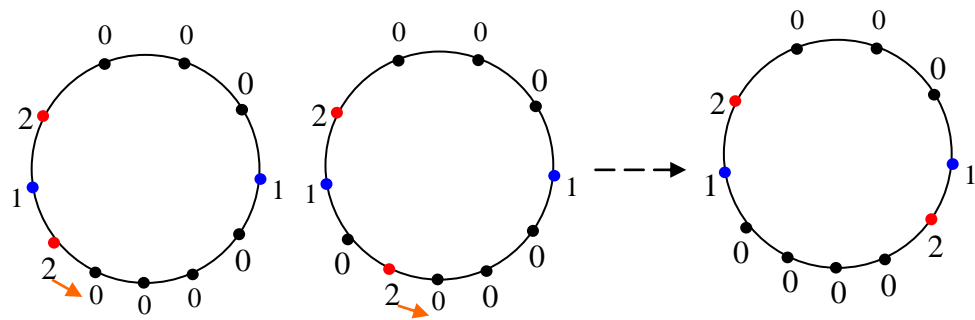
Kırmızı boncuk 7 farklı konumda olabilir.(ok yönünde hareket)



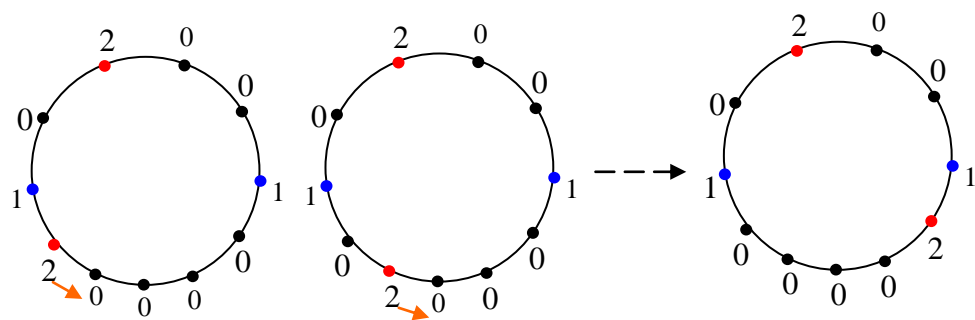
6 farklı durum vardır. (ok yönünde hareket)



3 farklı durum vardır.



5 farklı durum vardır.



5 farklı durum vardır.

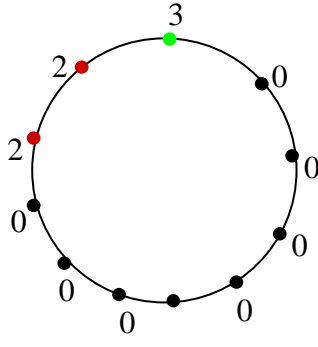
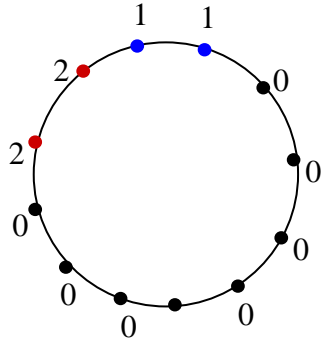
Oluşan durumları toplarsak:

$$F(2,2,7) = 20 + 16 + 12 + 9 + 6 + 4 + 2 + 1 + 4 + 7 + 6 + 3 + 5 + 5 = 100$$

Soru 6: 2 tane özdeş mavi 2 tane özdeş kırmızı ve 8 tane özdeş siyah boncukla kaç farklı bileklik yapılabilir.

Çözüm:

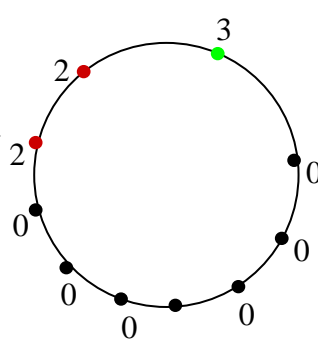
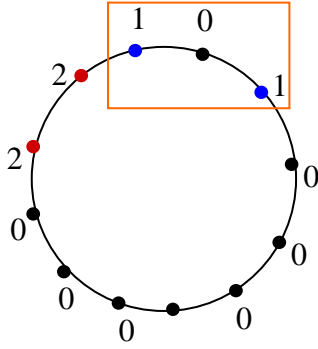
2 tane özdeş mavi boncuğun yan yana olma durumu :



$F(1,2,8) = 25$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına siyah boncuk alarak,özdeş siyah boncuk sayısını artırma durumu:

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **bir** tane siyah boncuk alırsak,



$F(1,2,7) = 20$ durum vardır.

Benzer olarak;
2 tane özdeş mavi boncuk
arasına **2 tane özdeş siyah**

boncuk alırsak $F(1,2,6) = 16$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **3 tane özdeş siyah** boncuk alırsak $F(1,2,5) = 12$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **4 tane özdeş siyah** boncuk alırsak $F(1,2,4) = 9$ durum vardır.

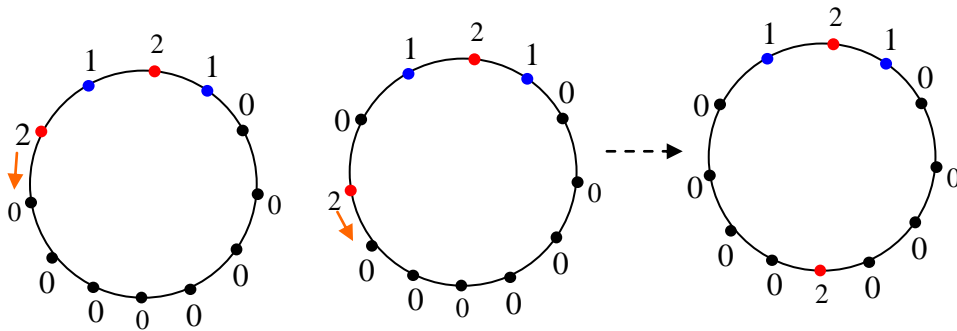
2 tane özdeş mavi boncuk arasına **5 tane özdeş siyah** boncuk alırsak $F(1,2,3) = 6$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **6 tane özdeş siyah** boncuk alırsak $F(1,2,2) = 4$ durum vardır.

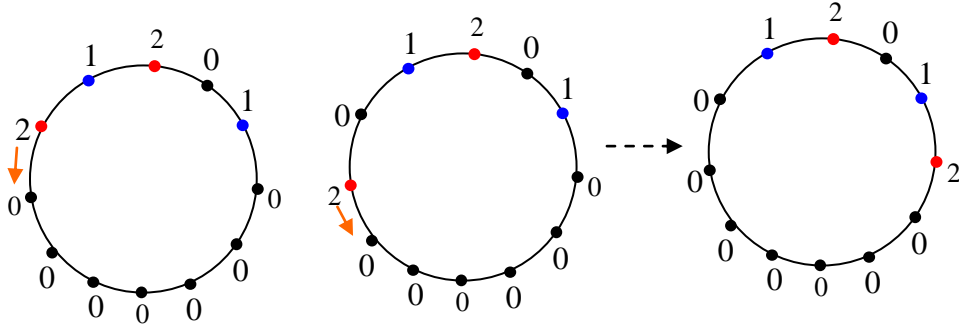
2 tane özdeş mavi boncuk arasına **7 tane özdeş siyah** boncuk alırsak $F(1,2,1) = 2$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **8 tane özdeş siyah** boncuk alırsak 1 tane durum vardır.

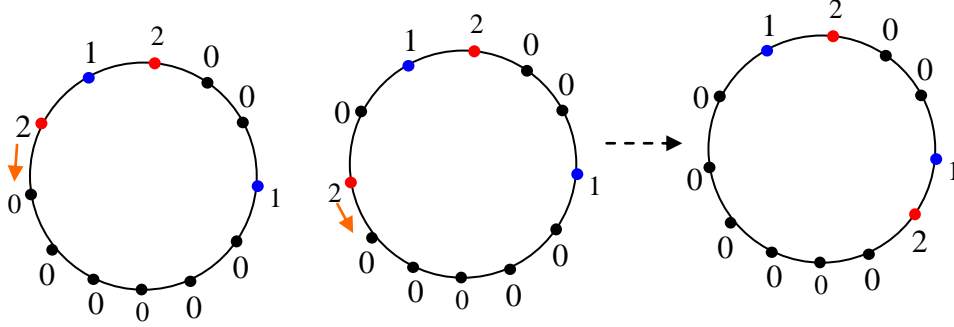
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı boncuk alıp siyah boncuk sayısını artırma durumu:



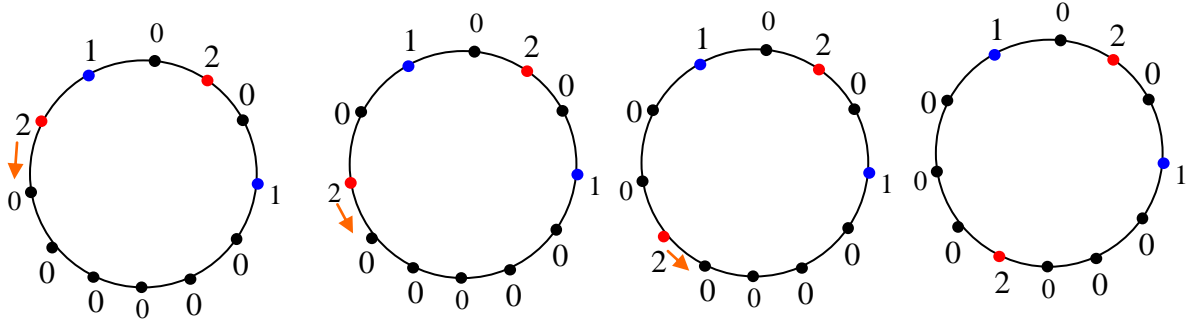
5 farklı durum, (ok yönünde hareket)



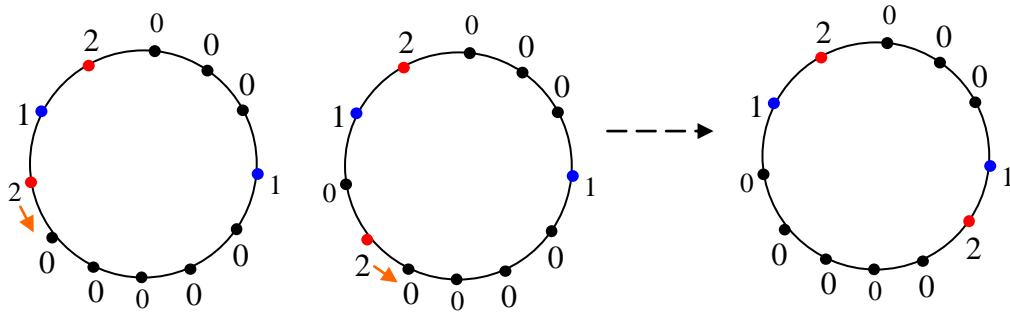
Kırmızı boncuk 8 farklı konumda olabilir.(ok yönünde hareket)



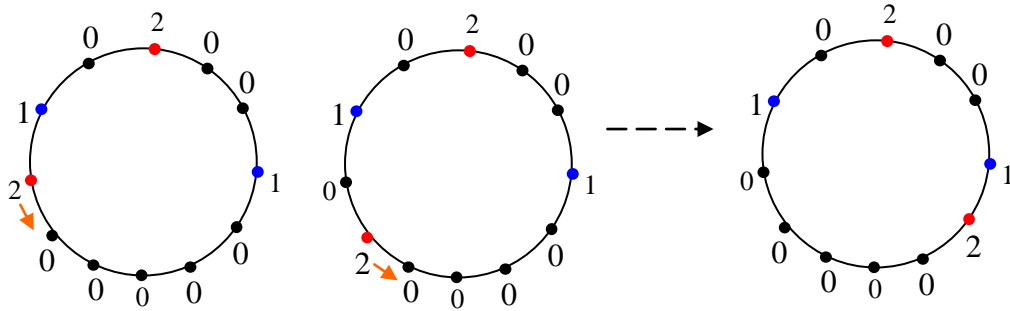
7 farklı durum vardır. (ok yönünde hareket)



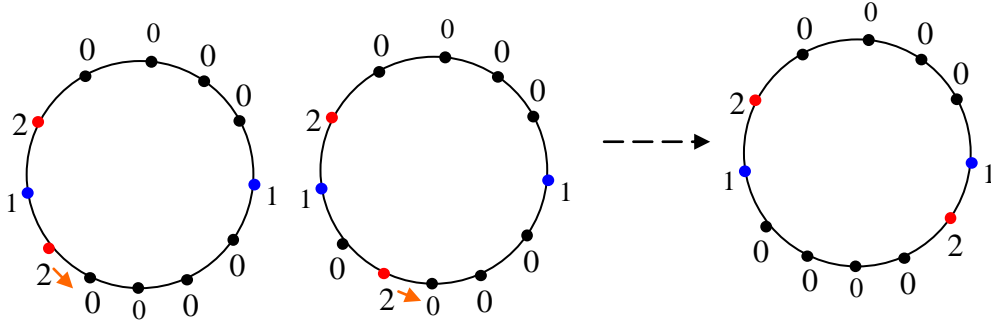
4 farklı durum vardır.



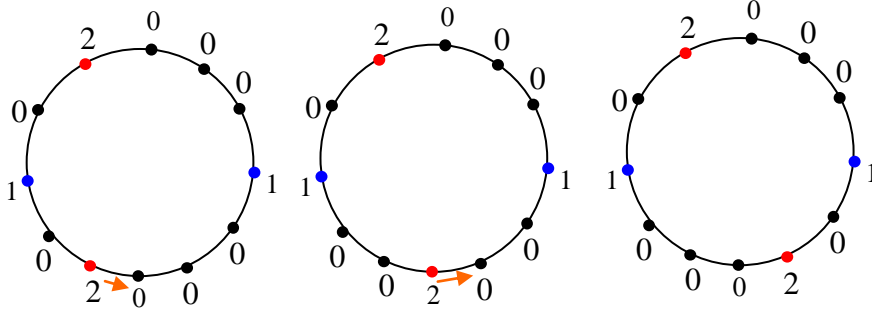
6 farklı durum vardır. (ok yönünde hareket)



6 farklı durum vardır. (ok yönünde hareket)

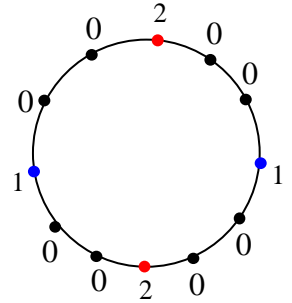


5 farklı durum vardır. (ok yönünde hareket)



3 farklı durum vardır.

1 tane durum vardır.



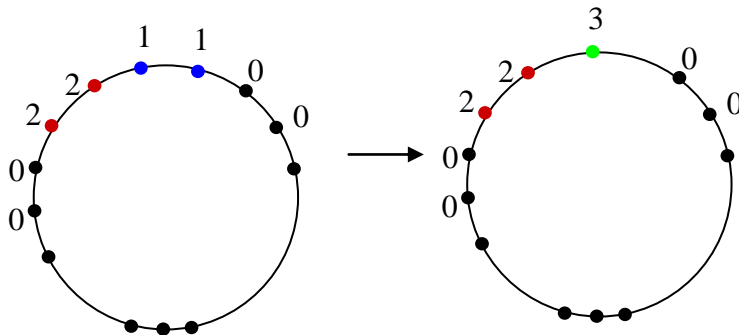
Oluşan durumları toplarsak:

$$F(2,2,8) = 25 + 20 + 16 + 12 + 9 + 6 + 4 + 2 + 1 + 5 + 8 + 7 + 4 + 6 + 6 + 5 + 3 + 1 = 140$$

Teorem 6: 2 tane özdeş mavi 2 tane özdeş kırmızı ve $2n+1$ $n \in \mathbb{N}$ tane özdeş siyah boncukla yapılacak bileklerin sayısını $F(1,2,2n+1)$ ile gösterirsek

$$F(2,2,2n+1) = n^3 + 5n^2 + 8n + 4 \text{ tane farklı bileklik yapılabilir.}$$

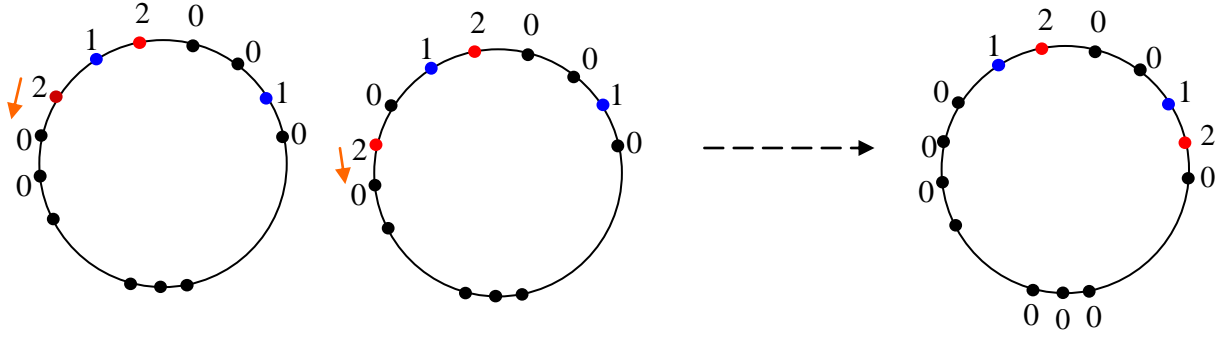
İspat: 2 tane özdeş mavi boncuğun yan yana olma durumu :



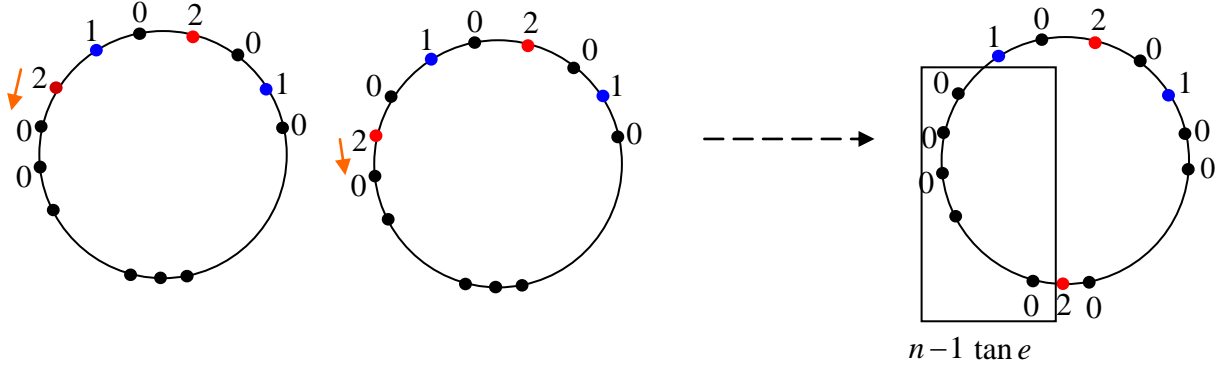
$F(1,2,2n+1)$ tane durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına siyah boncuk alarak,özdeş siyah boncuk sayısını artırma durumu:

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **bir tane siyah** boncuk alırsak,



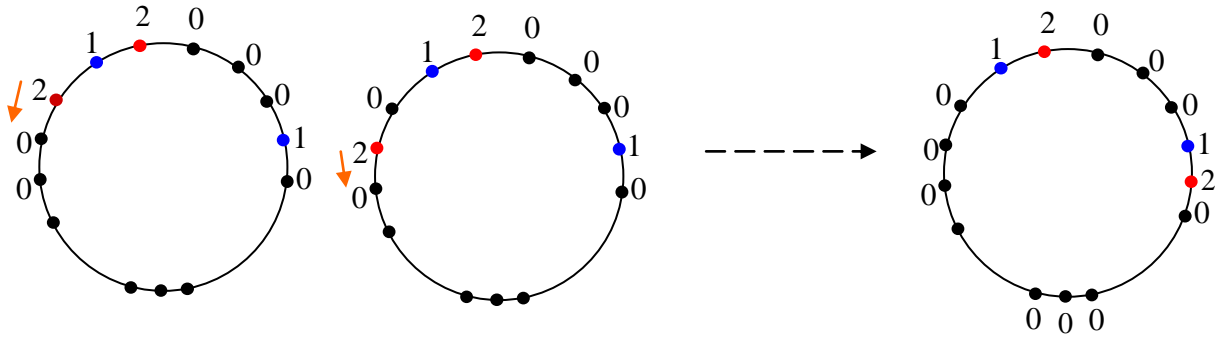
$2n$ farklı durum vardır. (ok yönünde hareket)



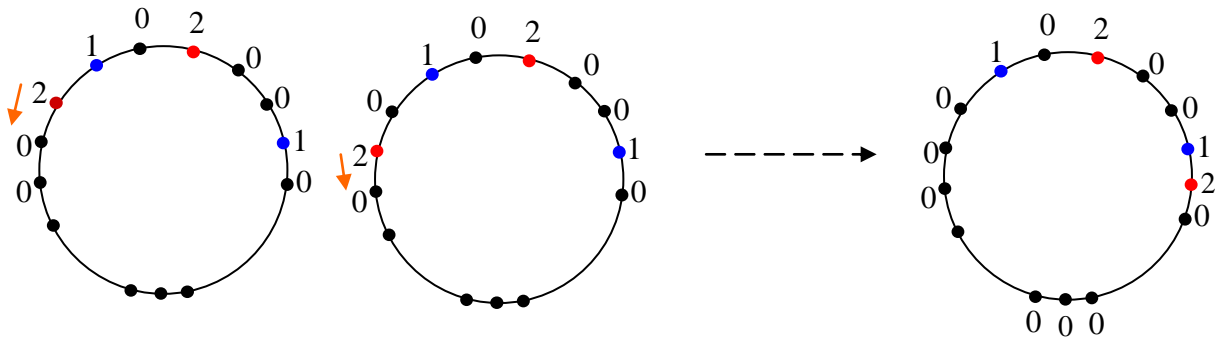
n tane farklı durum vardır.

Oluşan durum sayısı: $2n + n = 3n$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 3 özdeş siyah boncuk alırsak



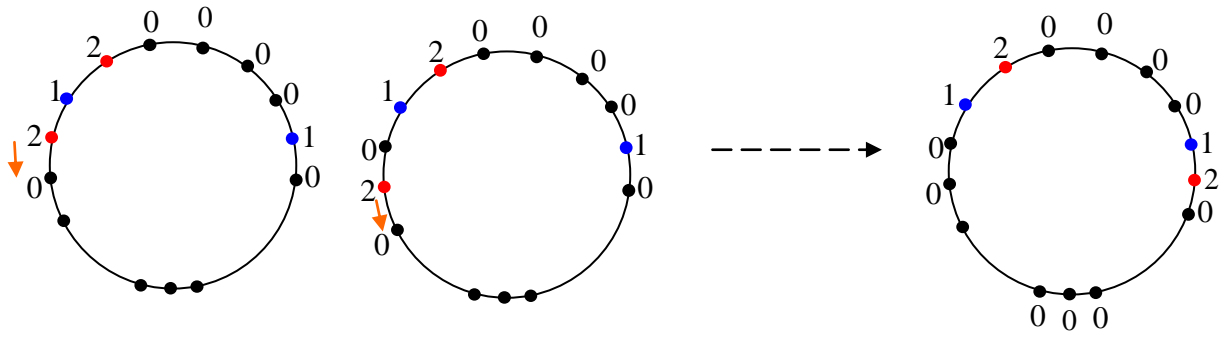
$2n - 1$ farklı durum vardır.



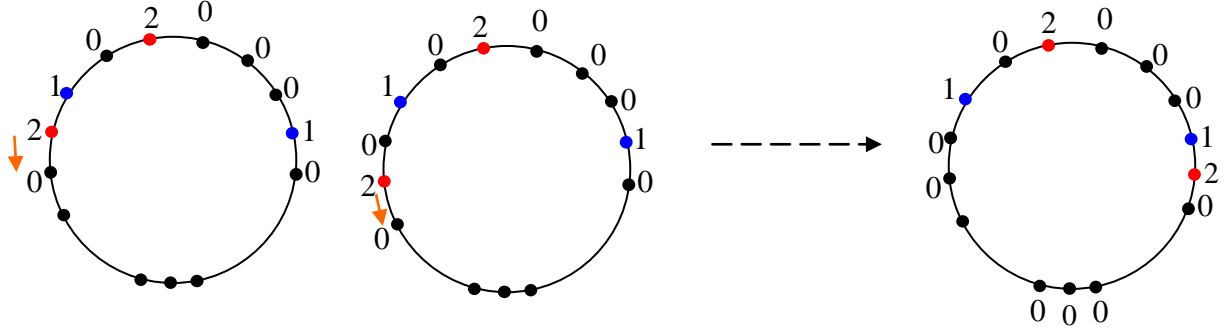
$2n - 1$ farklı durum vardır.

Oluşan durum sayısı: $2 \cdot (2n - 1)$ tanedir.

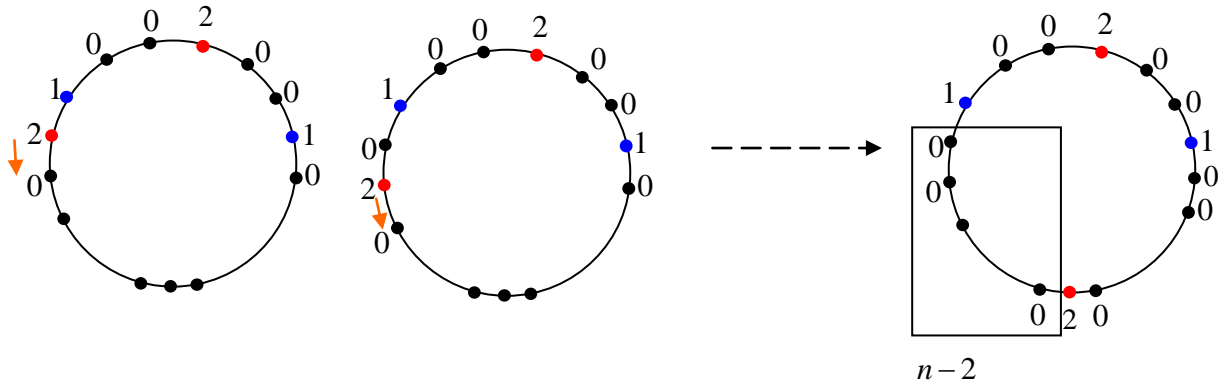
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 4 özdeş siyah boncuk alırsak



$2n-2$ farklı durum vardır.



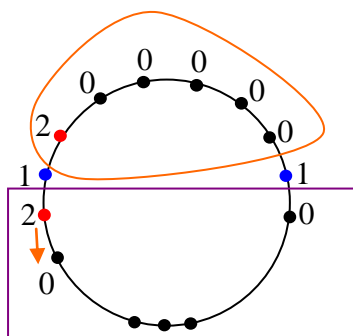
$2n-2$ farklı durum vardır.



$n-1$ tane farklı durum vardır.

Oluşan durum sayısı: $2 \cdot (2n-2) + (n-1) = 5 \cdot (n-1)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 5 özdeş siyah boncuk alırsak



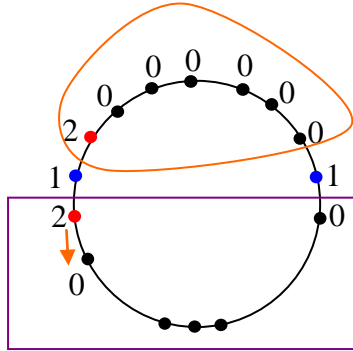
Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 200000 \\ 020000 \\ 002000 \end{array} \right\} 3 \text{ farklı durum}$

Her duruma karşın alt kısmın (mor) $\underbrace{200 \dots 00}_{2n-4}$ 2 sayısı $(2n-3)$

farklı konumda buluna bilir.

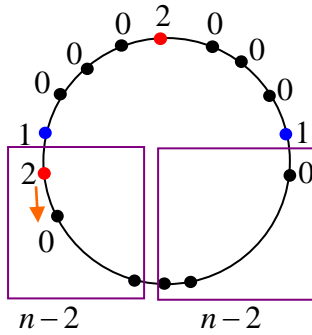
Oluşan durum sayısı: $3 \cdot (2n-3)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 6 özdeş siyah boncuk alırsak



Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 2000000 \\ 0200000 \\ 0020000 \end{array} \right\}$ (3 tane farklı) durumlarında
alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{2n-5}$ 2 sayısı $(2n-4)$ farklı konumda
buluna bilir.bu şekilde oluşacak durum sayısı: $3.(2n-4)$

Üst Kısım (Turuncu) 0002000 olma durumunda simetriden dolayı alt kısmın (mor) $n-2$ farklı durumu vardır.



Oluşan toplam durum sayısı: $3.(2n-4) + (n-2) = 7.(n-2)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 7 özdeş siyah boncuk alırsak

Benzer olarak;

Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 20000000 \\ 02000000 \\ 00200000 \\ 00020000 \end{array} \right\}$ 4 farklı durum

Her duruma karşın alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{2n-6}$ 2 sayısı $(2n-5)$ farklı konumda buluna bilir.

Oluşan durum sayısı: $4.(2n-5)$ tanedir.

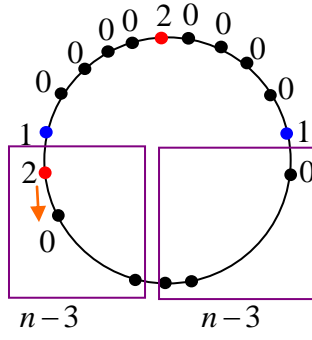
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 8 özdeş siyah boncuk alırsak

Benzer olarak,

Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 200000000 \\ 020000000 \\ 002000000 \\ 000200000 \end{array} \right\}$ (4 tane farklı) durumlarında

alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{2n-7}$ 2 sayısı $(2n-6)$ farklı konumda buluna bilir.Bu şekilde oluşacak

durum sayısı: $4.(2n-6)$



Üst Kısım (Turuncu) 000020000 olma durumunda simetriden dolayı alt kısmın (mor) $n-3$ farklı durumu vardır.

Oluşan toplam durum sayısı: $4.(2n-6) + (n-3) = 9.(n-3)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve $2k+1$ ($k \in N$) tane özdeş siyah boncuk alırsak Benzer olarak;

Üst Kısım (Turuncu) :

$$\left. \begin{array}{l} 200..000..000 \\ 020..000..000 \\ \dots \\ 00...020...000 \end{array} \right\} k+1 \text{ farklı durum vardır.}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_k \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_k$

Her duruma karşın alt kısmın (mor) $\underbrace{200...00}_{2n-2k}$ 2 sayısı $(2n-2k+1)$ farklı konumda bulunabilir.

Oluşacak durum sayısı : $(k+1).(2n-2k+1)$ tanedir.

$2n+1$ tane özdeş siyah boncuktan oluşturduğumuz kolyede, üst kısım çift sayıda özdeş siyah boncuktan oluşuyorsa alt kısımda tek sayıda özdeş siyah boncuktan oluşur. Üst kısım tek sayıda özdeş siyah boncuktan oluşuyorsa alt kısımda çift sayıda özdeş siyah boncuktan oluşur. Dolayısıyla bütün durumlarda aynı formülü kullanabiliriz.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve $2k+1$ ($k \in N$) tane özdeş siyah boncuk alırsak Oluşacak durum sayısı : $(k+1).(2n-2k+1)$ tanedir.

Tek sayıda özdeş siyah(ÜST)	Çift sayıda özdeş siyah (ALT)	Durum sayısı
1	$2n$	$2n+1$
3	$2n-2$	$2.(2n-1)$
5	$2n-4$	$3.(2n-3)$
7	$2n-6$	$4.(2n-5)$
9	$2n-8$	$5.(2n-7)$
...
$2k+1$	$2n-2k$	$(k+1).(2n-2k+1)$
...
$2n-7$	8	$(n-3).9 = 9.(n-3)$

$2n-5$	6	$(n-2).7=7.(n-2)$
$2n-3$	4	$(n-1).5=5.(n-5)$
$2n-1$	2	$n.3=3.n$
$2n+1$	0	$n+1$

Elde ettiğimiz bütün durumları toplarsak.

$$F(2,2,2n+1) = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} F(1,2,k) + \sum_{k=0}^n (k+1).(2n-2k+1) \text{ buluruz.}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+1).(2n-2k+1) &= (2n+1) + \sum_{k=1}^n (k+1).(2n-2k+1) \\ &= (2n+1) + \sum_{k=1}^n (2nk - 2k^2 + 2n - k + 1) \\ &= (2n+1) + 2n \cdot \frac{n.(n+1)}{2} - 2 \cdot \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} + 2n^2 - \frac{n.(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \end{aligned}$$

Teorem 2 den $F(1,2,2n+1) = n^2 + 3n + 2$ ve $F(1,2,2n) = n^2 + 2n + 1$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} F(1,2,k) = \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1) + \sum_{k=0}^n (k^2 + 3k + 2) = \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1) + \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k + 2) + 2$$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} F(1,2,k) = \sum_{k=1}^n (2n^2 + 5n + 3) + 2 = 2 \cdot \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} + 5 \cdot \frac{n.(n+1)}{2} + 3n + 2$$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} F(1,2,k) = \frac{4n^3 + 21n^2 + 35n + 12}{6}$$

$$F(2,2,2n+1) = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} F(1,2,k) + \sum_{k=0}^n (k+1).(2n-2k+1) \text{ bulduğunuz eşitlikleri yerine}$$

yazarsak

$$F(2,2,2n+1) = 1 + \frac{4n^3 + 21n^2 + 35n + 12}{6} + \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

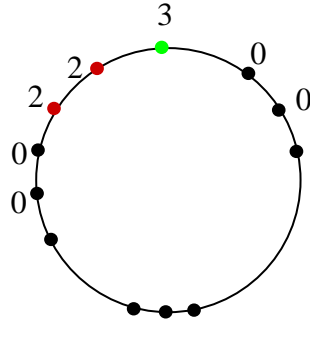
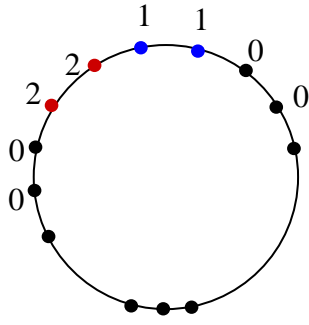
Sonuç olarak ; $F(2,2,2n+1) = n^3 + 5n^2 + 8n + 4$

$$F(2,2,1) = 4, F(2,2,3) = 18, F(2,2,5) = 48, F(2,2,7) = 100, F(2,2,9) = 180, F(2,2,11) = 294$$

⋮

Teorem 7: 2 tane özdeş mavi 2 tane özdeş kırmızı ve $4n$ ($n \in N$) tane özdeş siyah boncukla yapılacak bileklerin sayısını $F(1,2,4n)$ ile gösterirsek $F(2,2,4n) = 8n^3 + 14n^2 + 9n + 2$ tane farklı bileklik yapılabilir.

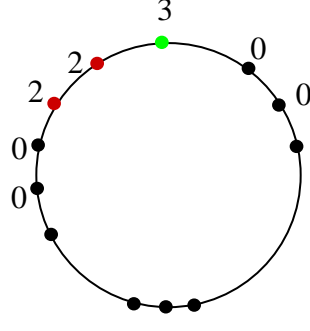
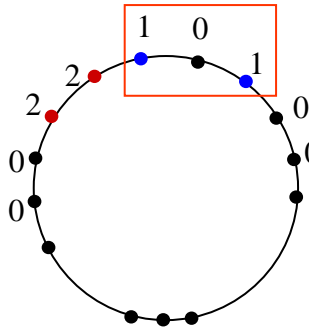
İspat: 2 tane özdeş mavi boncuğun yan yana olma durumu :



$F(1,2,4n)$ tane durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına siyah boncuk alarak,özdeş siyah boncuk sayısını artırma durumu:

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **bir tane siyah** boncuk alırsak,



$F(1,2,4n-1)$ durum vardır.

Benzer olarak;2 tane özdeş mavi boncuk arasına **2 tane özdeş siyah boncuk** alırsak

$F(1,2,4n-2)$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına **3 tane özdeş siyah boncuk** alırsak $F(1,2,4n-1)$ durum vardır.

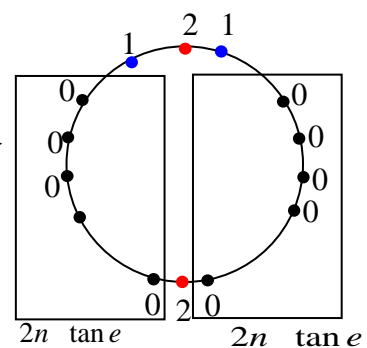
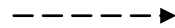
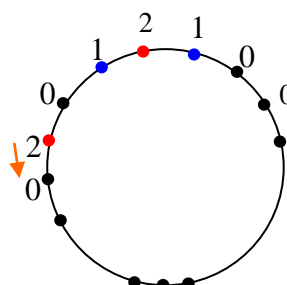
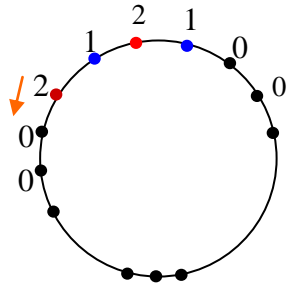
2 tane özdeş mavi boncuk arasına **4 tane özdeş siyah boncuk** alırsak $F(1,2,4n-2)$ durum vardır.

Benzer olarak devam edersek,

2 tane özdeş mavi boncuk arasına $4n-1$ tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,1) = 2$ durum vardır.

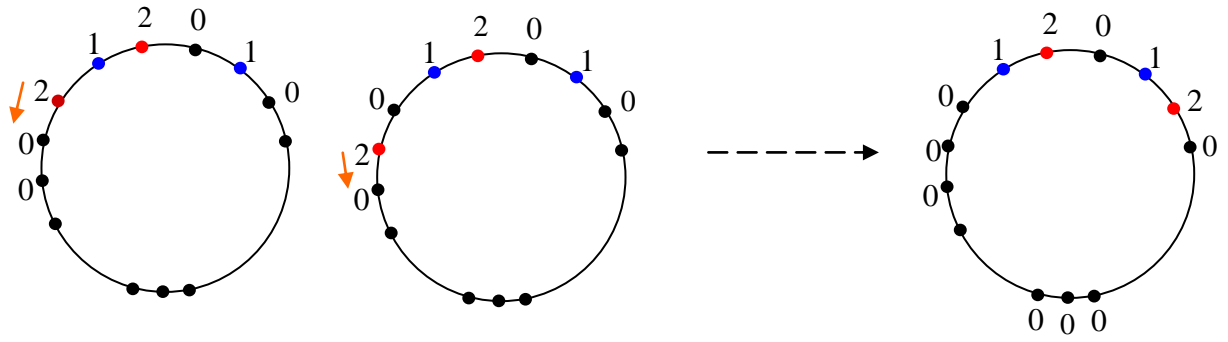
2 tane özdeş mavi boncuk arasına $4n$ tane özdeş siyah boncuk alırsak 1 tane durum vardır.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı boncuk alıp siyah boncuk sayısını artırma durumu:



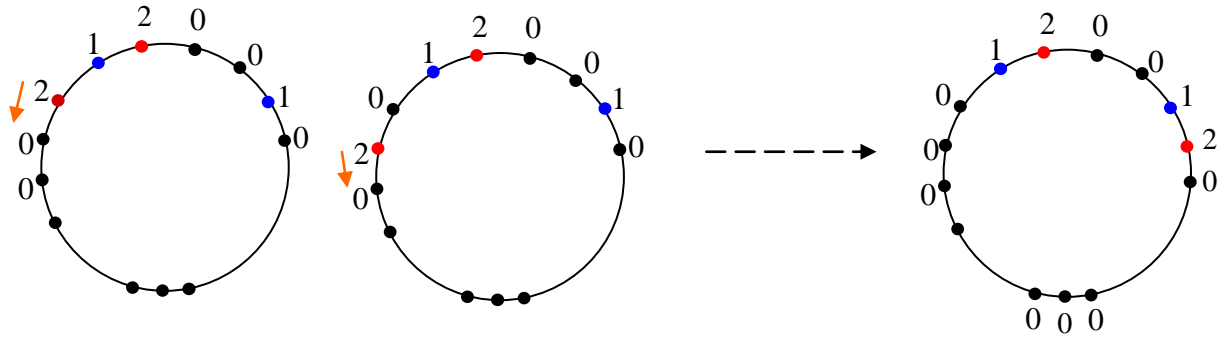
$2n+1$ tane farklı durum,

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve bir siyah boncuk alırsak

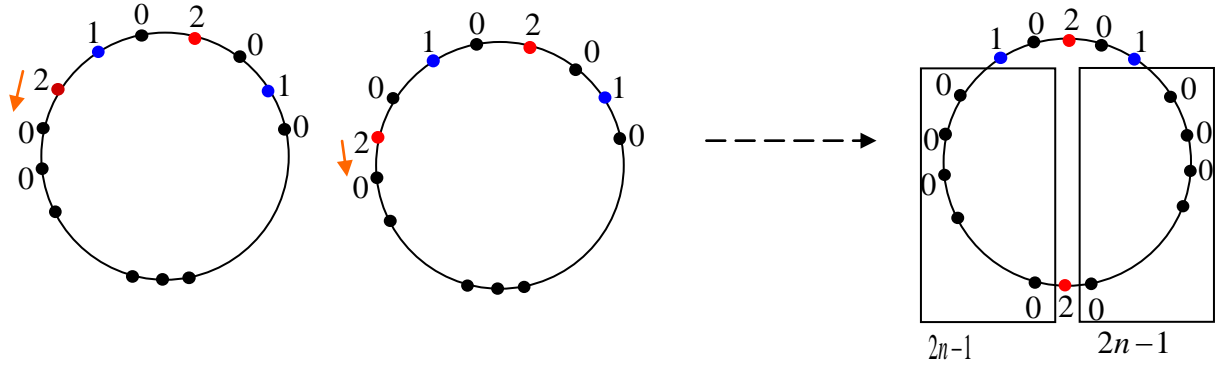


Kırmızı boncuk $4n$ farklı konumda olabilir.(ok yönünde hareket)

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 2 özdeş siyah boncuk alırsak



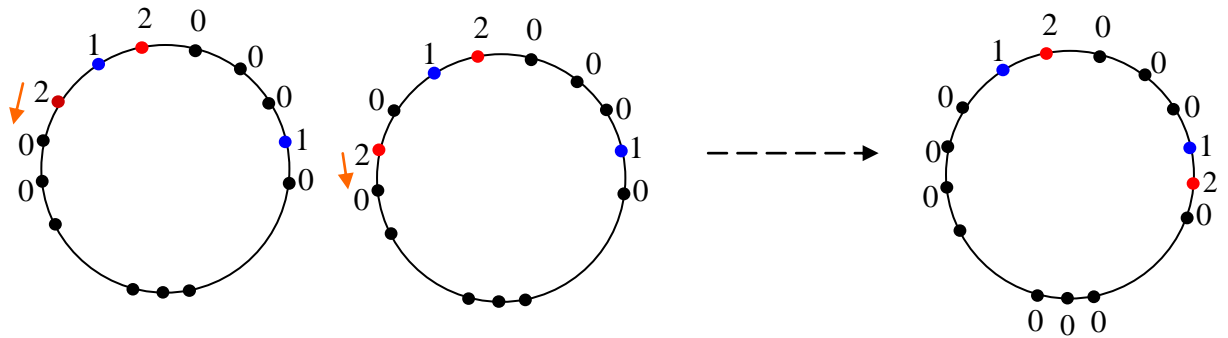
$4n-1$ farklı durum vardır. (ok yönünde hareket)



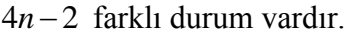
$2n$ tane farklı durum vardır.

Oluşan durum sayısı: $(4n-1) + (2n)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 3 özdeş siyah boncuk alırsak

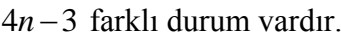
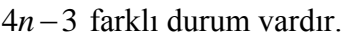


$4n-2$ farklı durum vardır.



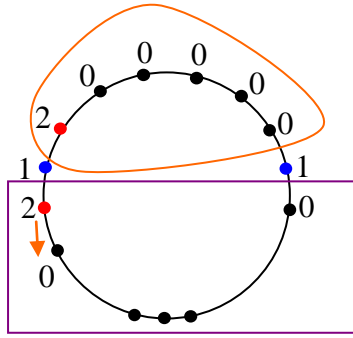
Oluşan durum sayısı: $2 \cdot (4n - 2)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 4 özdeş siyah boncuk alırsak



Oluşan durum sayısı: $2 \cdot (4n - 3) + (2n - 1)$ tanedir.

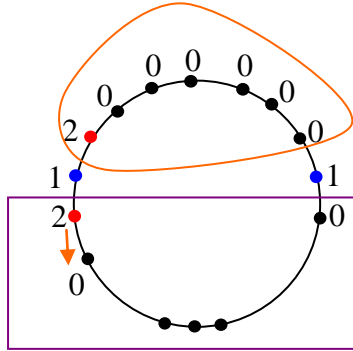
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 5 özdeş siyah boncuk alırsak



Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 200000 \\ 020000 \\ 002000 \end{array} \right\} 3 \text{ farklı durum}$

Her duruma karşın alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{4n-5}$ 2 sayısı $(4n-4)$ farklı konumda buluna bilir.
Oluşan durum sayısı: $3.(4n-4)$ tanedir.

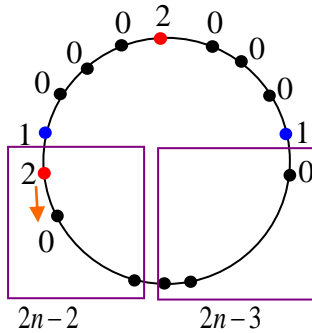
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 6 özdeş siyah boncuk alırsak



Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 2000000 \\ 0200000 \\ 0020000 \end{array} \right\} (3 \text{ tane farklı}) \text{ durumlarında}$

alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{4n-6}$ 2 sayısı $(4n-5)$ farklı konumda buluna bilir. bu şekilde oluşacak durum sayısı: $3.(4n-5)$

Üst Kısım (Turuncu) 0002000 olma durumunda simetriden dolayı alt kısmın (mor) $2n-2$ farklı durumu vardır.



Oluşan toplam durum sayısı: $3.(4n-5) + (2n-2)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 7 özdeş siyah boncuk alırsak

Benzer olarak;

Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 20000000 \\ 02000000 \\ 00200000 \\ 00020000 \end{array} \right\} 4 \text{ farklı durum}$

Her duruma karşın alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{4n-7}$ 2 sayısı $(4n-6)$ farklı konumda buluna bilir.

Oluşan durum sayısı: $4.(4n-6)$ tanedir.

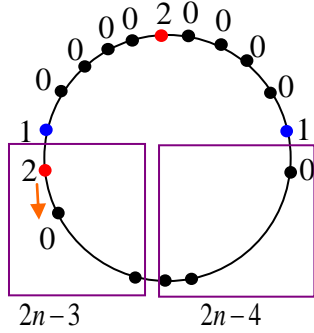
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 8 özdeş siyah boncuk alırsak

Benzer olarak,

Üst Kısım (Turuncu) :

$$\left. \begin{array}{l} 200000000 \\ 020000000 \\ 002000000 \\ 000200000 \end{array} \right\} (4 \text{ tane farklı durumlarında})$$

alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{4n-8}$ 2 sayısı $(4n-7)$ farklı konumda bulunabilir. Bu şekilde oluşacak durum sayısı: $4 \cdot (4n-7)$



Üst Kısım (Turuncu) 000020000 olma durumunda simetriden dolayı alt kısmın (mor) $2n-3$ farklı durumu vardır.

Oluşan toplam durum sayısı: $4 \cdot (4n-7) + (2n-3)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) tane özdeş siyah boncuk alırsak

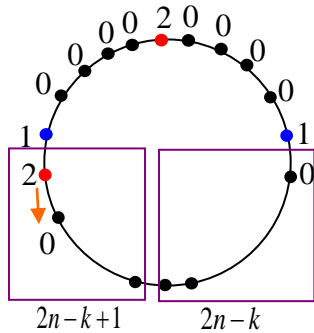
Üst Kısım (Turuncu) :

$$\left. \begin{array}{l} 200\dots 000\dots 000 \\ 020\dots 000\dots 000 \\ \dots \\ 00\dots 020\dots 000 \end{array} \right\} k \text{ tane farklı durum vardır.}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{k-1} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{k+1}$

alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{4n-2k}$ 2 sayısı $(4n-2k+1)$ farklı konumda bulunabilir. Bu şekilde

oluşacak durum sayısı: $k \cdot (4n-2k+1)$ tanedir.



Üst Kısım (Turuncu) $\underbrace{00\dots 00}_k \underbrace{200\dots 00}_k$ olma durumunda simetriden dolayı alt kısmın (mor) $2n-k+1$ farklı durumu vardır.

Oluşan toplam durum sayısı: $k \cdot (4n-2k+1) + 2n-k+1$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve $2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) tane özdeş siyah boncuk alırsak

Benzer olarak;

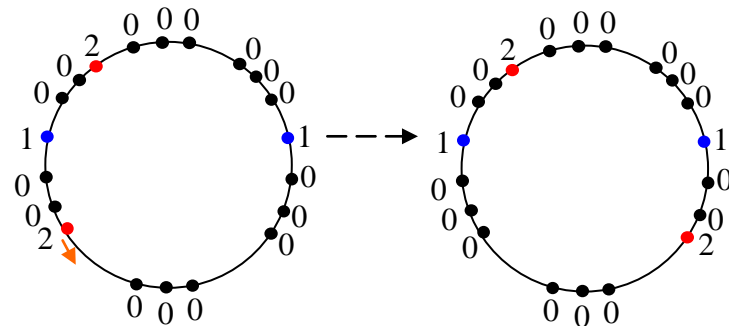
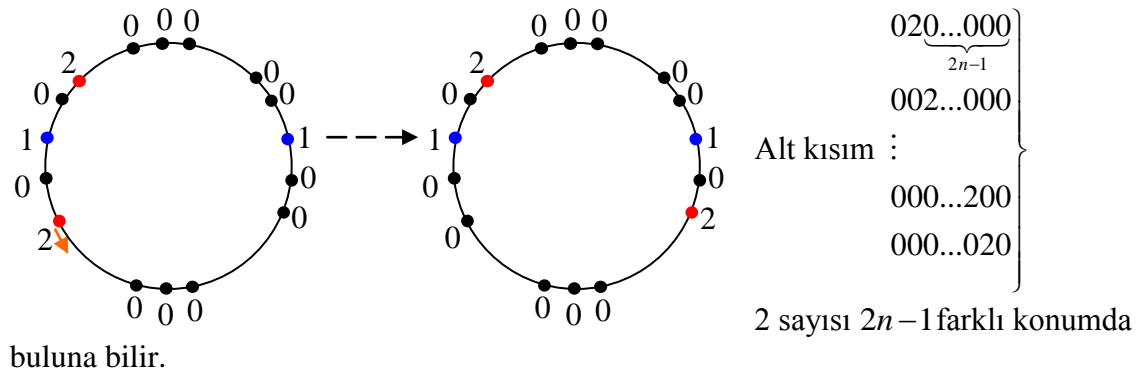
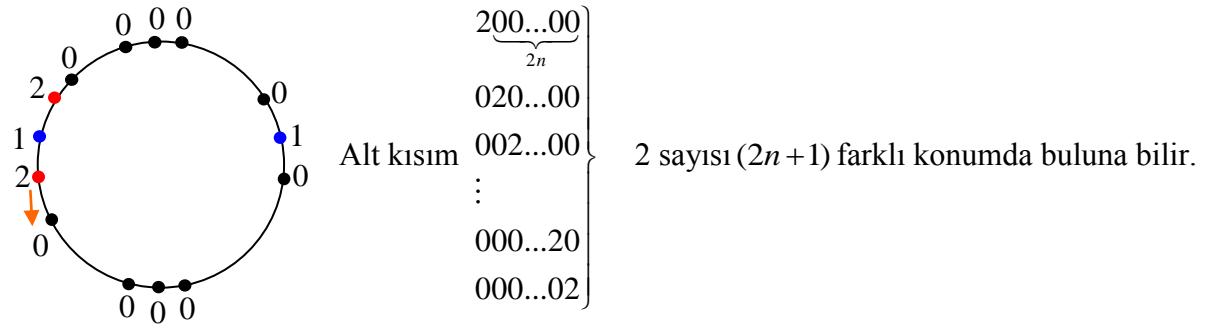
Üst Kısım (Turuncu) :

$$\left. \begin{array}{l} 200..000...000 \\ 020..000...000 \\ \dots \\ \underbrace{00...0}_{k} \underbrace{020...000}_{k+1} \end{array} \right\} k+1 \text{ farklı durum vardır.}$$

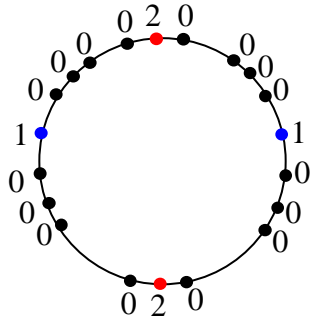
Her duruma karşın alt kısmın (mor) $\underbrace{200...00}_{4n-2k-1}$ 2 sayısı $(4n-2k)$ farklı konumda buluna bilir.

Oluşacak durum sayısı : $(k+1)(4n-2k)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve $2n$ tane özdeş siyah boncuk alırsak üst kısımdaki siyah boncuk sayısı ile alt kısımdaki siyah boncuk sayısı eşit olduğu durumu inceleyelim:



2 sayısı $2n-3$ farklı konumda buluna bilir. Benzer olarak devam edersek son durum:



üst kısımdaki siyah boncuk sayısı ile alt kısımdaki siyah boncuk sayısı eşit olduğunda

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı alıp özdeş siyah boncukları alarak elde ettiğimiz durumları tablolastıralım.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı alıp özdeş siyah boncukları alarak elde ettiğimiz durumlar:.		
Üst kısma alınan siyah boncuk sayısı	Simetrik olmayan durumlar	Simetrik olan durumlar
0	0	$2n+1$
1	$4n$	0
2	$4n-1$	$2n$
3	$2.(4n-2)$	0
4	$2.(4n-3)$	$2n-1$
5	$3.(4n-4)$	0
6	$3.(4n-5)$	$2n-2$
7	$4.(4n-6)$	0
8	$4.(4n-7)$	$2n-3$
\vdots	\vdots	\vdots
$2k$	$k.(4n-2k+1)$	$2n-k+1$
$2k+1$	$(k+1).(4n-2k)$	0
\vdots	\vdots	\vdots

2n-1	(n+1).(2n)	0
2n (özel durum)	$n^2 + 2n + 1$	

Elde ettiğimiz bütün durumları toplarsak.

$$F(2,2,4n) = 1 + \sum_{k=1}^{4n} F(1,2,k) + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1).(4n-2k) + \sum_{k=0}^{n-1} (k.(4n-2k+1) + (2n-k+1)) + (n^2 + 2n + 1) \text{ buluruz.}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1).(4n-2k) = \sum_{k=1}^n (k-1+1).(4n-2(k-1)) = \sum_{k=1}^n k.(4n-2k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^n (4nk - 2k^2 + 2k) = 4n. \frac{n.(n+1)}{2} - 2. \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} + 2. \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$= \frac{6n^3 + 6n^2 - 2n^3 - 3n^2 - n + 3n^2 + 3n}{3} = \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k.(4n-2k+1) + (2n-k+1)) = \sum_{k=1}^n ((k-1).(4n-2(k-1)+1) + (2n-(k-1)+1))$$

$$= \sum_{k=1}^n [(k-1).(4n-2k+3) + (2n-k+2)] = \sum_{k=1}^n [4nk - 2k^2 + 3k - 4n + 2k - 3 + 2n - k + 2]$$

$$= \sum_{k=1}^n (4nk - 2k^2 + 4k - 2n - 1) = 4n. \frac{n.(n+1)}{2} - \frac{2n.(n+1).(2n+1)}{6} + 4. \frac{n.(n+1)}{2} - 2n^2 - n$$

$$= 2n^3 + 2n^2 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{3} + 2n^2 + 2n - 2n^2 - n = \frac{4n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{4n} F(1,2,k) \text{ değerini bulalım.}$$

$$F(1,2,1) = 2, F(1,2,2) = 4 \text{ olmak üzere}$$

$$\forall n \in N \text{ olmak üzere } F(1,2,2n+1) = n^2 + 3n + 2 \text{ dir.}$$

$$\forall n \in N^+ \text{ olmak üzere } F(1,2,2n) = n^2 + 2n + 1 \text{ dir.}$$

$$\sum_{k=1}^{4n} F(1,2,k) = \sum_{k=1}^{2n} F(1,2,2k) + \sum_{k=0}^{2n-1} F(1,2,2k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{2n} F(1,2,2k) = \sum_{k=1}^{2n} (k^2 + 2k + 1) = \frac{2n.(2n+1).(4n+1)}{6} + 2. \frac{2n.(2n+1)}{2} + 2n$$

$$= \frac{8n^3 + 6n^2 + n}{3} + \frac{12n^2 + 6n}{3} + \frac{6n}{3} = \frac{8n^3 + 18n^2 + 13n}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{2n-1} F(1,2,2k+1) = \sum_{k=0}^{2n-1} (k^2 + 3k + 2) = \sum_{k=1}^{2n} [(k-1)^2 + 3(k-1) + 2] = \sum_{k=1}^{2n} [k^2 + k]$$

$$= \frac{2n.(2n+1).(4n+1)}{6} + \frac{(2n).(2n+1)}{2} = \frac{8n^3 + 6n^2 + n}{3} + 2n^2 + n = \frac{8n^3 + 12n^2 + 4n}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{4n} F(1,2,k) = \sum_{k=1}^{2n} F(1,2,2k) + \sum_{k=0}^{2n-1} F(1,2,2k+1) = \frac{8n^3 + 18n^2 + 13n}{3} + \frac{8n^3 + 12n^2 + 4n}{3} = \frac{16n^3 + 30n^2 + 17n}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{4n} F(1,2,k) = \frac{16n^3 + 30n^2 + 17n}{3}$$

Bulduğumuz eşitliklerini yerine yazarsak

$$F(2,2,4n) = 1 + \sum_{k=1}^{4n} F(1,2,k) + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1).(4n-2k) + \sum_{k=0}^{n-1} (k.(4n-2k+1) + (2n-k+1)) + (n^2 + 2n + 1)$$

$$F(2,2,4n) = 1 + \frac{16n^3 + 30n^2 + 17n}{3} + \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{3} + \frac{4n^3 + 3n^2 + 2n}{3} + (n^2 + 2n + 1)$$

$$F(2,2,4n) = 8n^3 + 14n^2 + 9n + 2 \text{ buluruz.}$$

Sonuç olarak ; $F(2,2,4n) = 8n^3 + 14n^2 + 9n + 2$

$$n = 1 \text{ için } F(2,2,4) = 33$$

$$n = 2 \text{ için } F(2,2,8) = 8.2^3 + 14.2^2 + 9.2 + 2 = 140$$

$$n = 3 \text{ için } F(2,2,12) = 8.3^3 + 14.3^2 + 9.3 + 2 = 371$$

$$n = 4 \text{ için } F(2,2,16) = 8.4^3 + 14.4^2 + 9.4 + 2 = 774$$

$$n = 5 \text{ için } F(2,2,20) = 8.5^3 + 14.5^2 + 9.5 + 2 = 1397$$

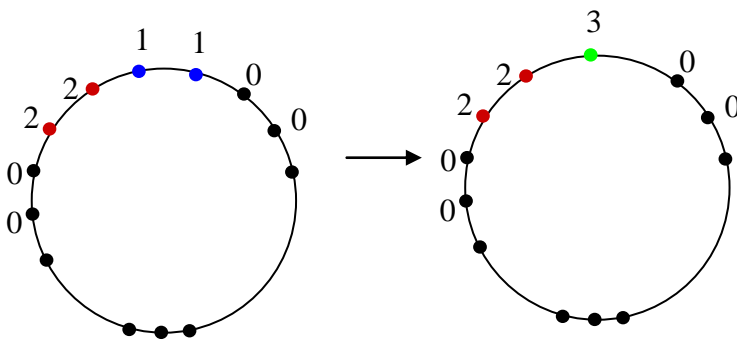
$$n = 6 \text{ için } F(2,2,24) = 8.6^3 + 14.6^2 + 9.6 + 2 = 2288$$

Teorem 8 : 2 tane özdeş mavi 2 tane özdeş kırmızı ve $4n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$) tane özdeş siyah boncukla yapılacak bileklerin sayısını $F(1,2,4n+2)$ ile gösterirsek

$$F(2,2,4n+2) = 8n^3 + 26n^2 + 29n + 11$$

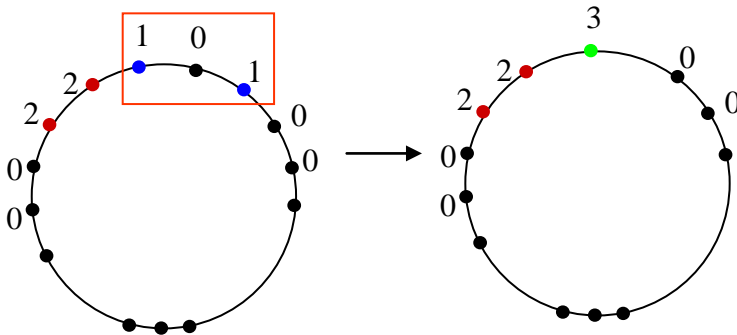
tane farklı bileklik yapılabilir.

İspat: 2 tane özdeş mavi boncuğun yan yana olma durumu :



$F(1,2,4n+2)$ tane durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına siyah boncuk alarak, özdeş siyah boncuk sayısını artırma durumu:



2 tane özdeş mavi boncuk arasına bir tane siyah boncuk alırsak,

$F(1,2,4n+1)$ durum vardır.

Benzer olarak; 2 tane özdeş mavi boncuk arasına 2 tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,4n)$ durum vardır.

2 tane özdeş mavi boncuk arasına 3 tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,4n-1)$ durum vardır.

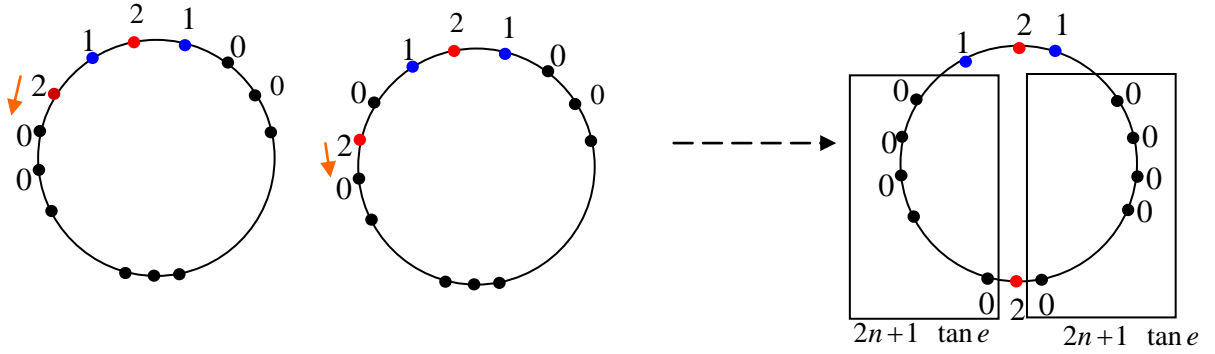
2 tane özdeş mavi boncuk arasına 4 tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,4n-2)$ durum vardır.

Benzer olarak devam edersek,

2 tane özdeş mavi boncuk arasına $4n+1$ tane özdeş siyah boncuk alırsak $F(1,2,1) = 2$ durum vardır.

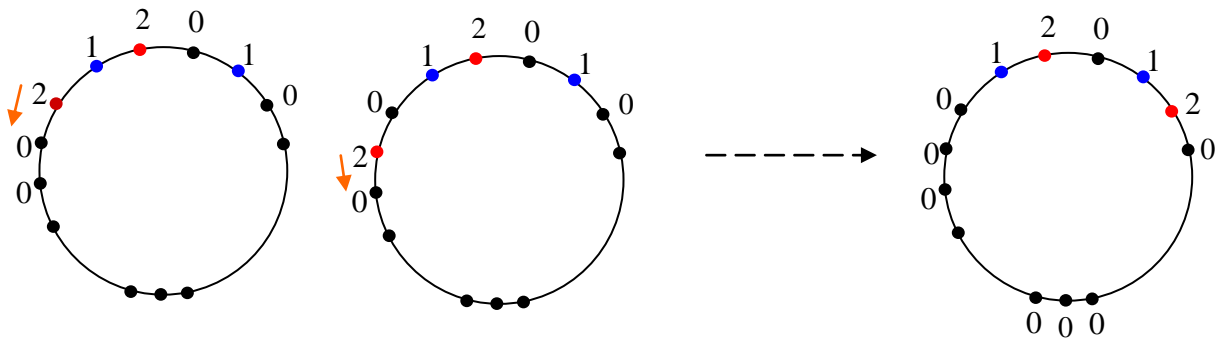
2 tane özdeş mavi boncuk arasına $4n+2$ tane özdeş siyah boncuk alırsak 1 tane durum vardır.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı boncuk alıp siyah boncuk sayısını artırma durumu:



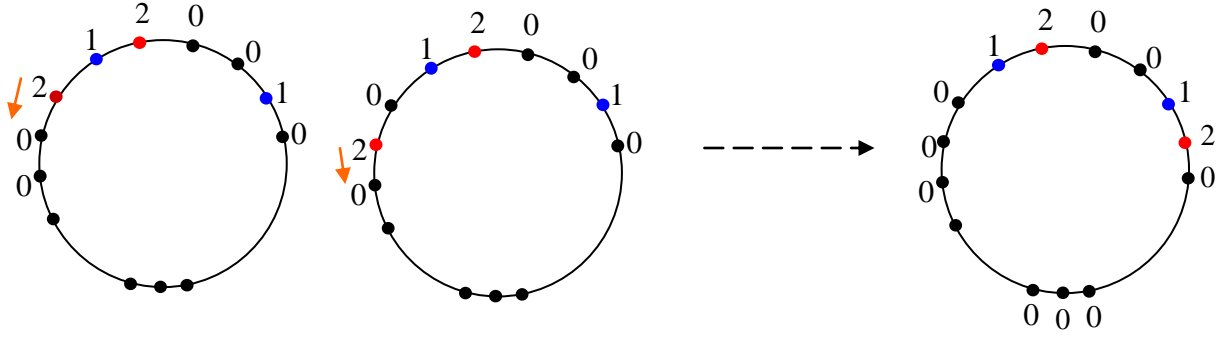
$2n+2$ tane farklı durum,

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve bir siyah boncuk alırsak

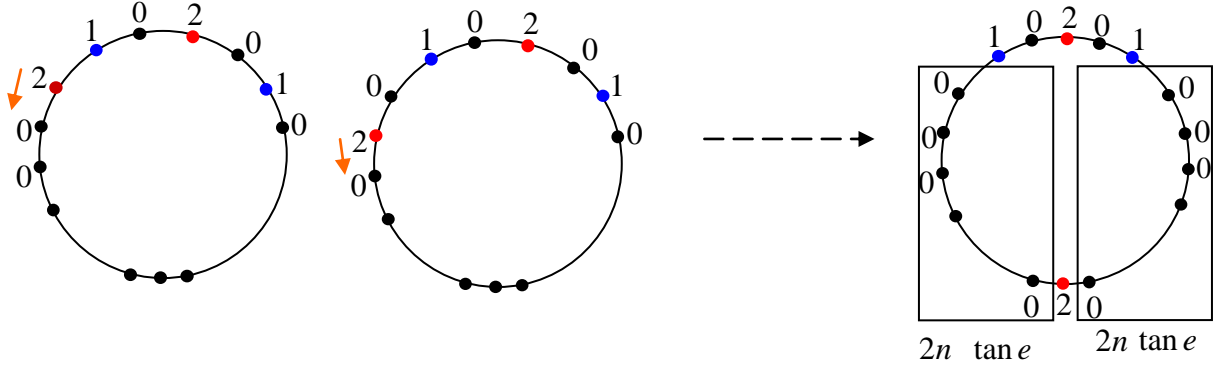


Kırmızı boncuk $4n+2$ farklı konumda olabilir. (ok yönünde hareket)

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 2 özdeş siyah boncuk alırsak



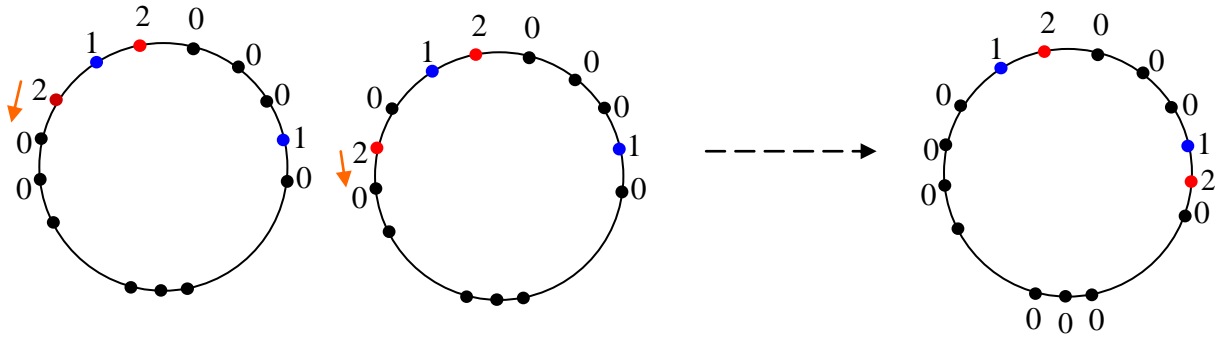
$4n+1$ farklı durum vardır. (ok yönünde hareket)



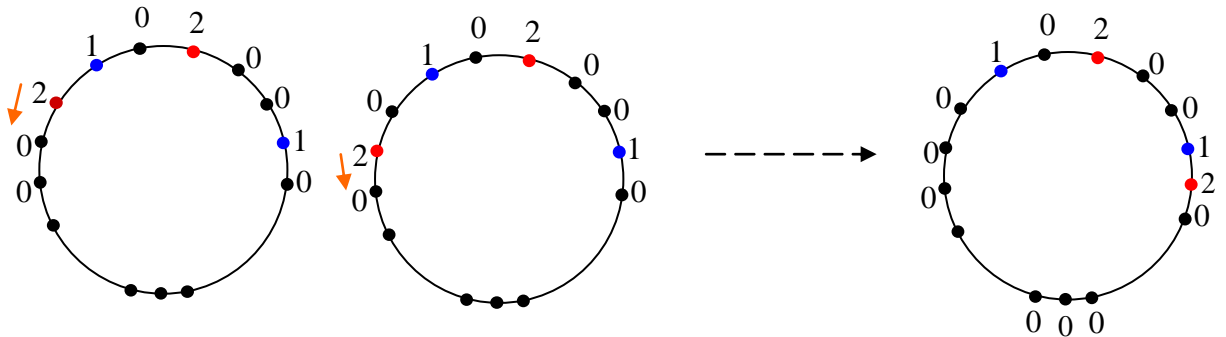
$2n+1$ tane farklı durum vardır.

Oluşan durum sayısı: $4n+1+2n+1=6n+2$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 3 özdeş siyah boncuk alırsak



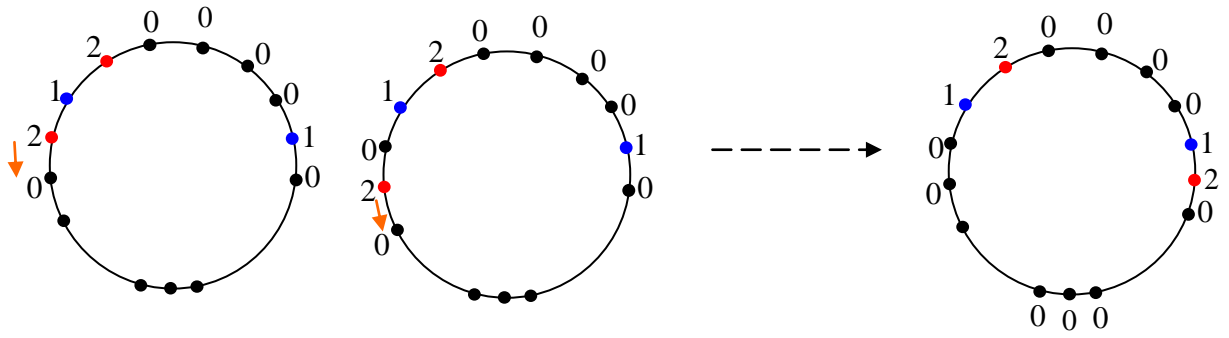
$4n$ farklı durum vardır.



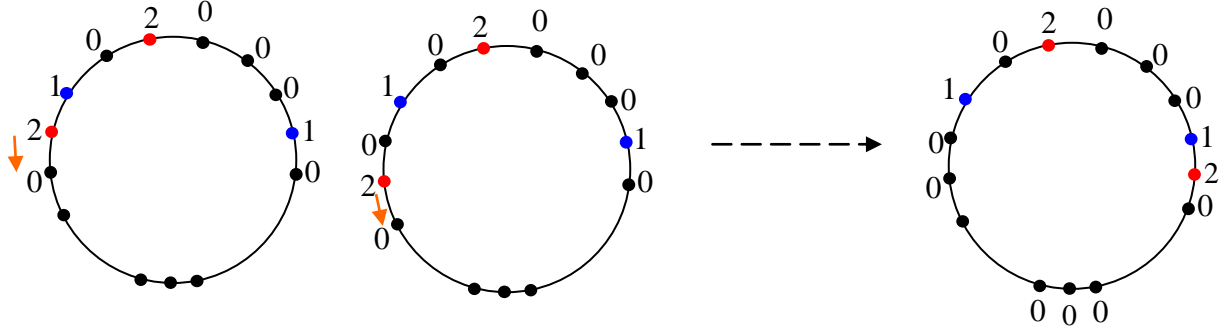
$4n$ farklı durum vardır.

Oluşan durum sayısı: $2.(4n)$ tanedir.

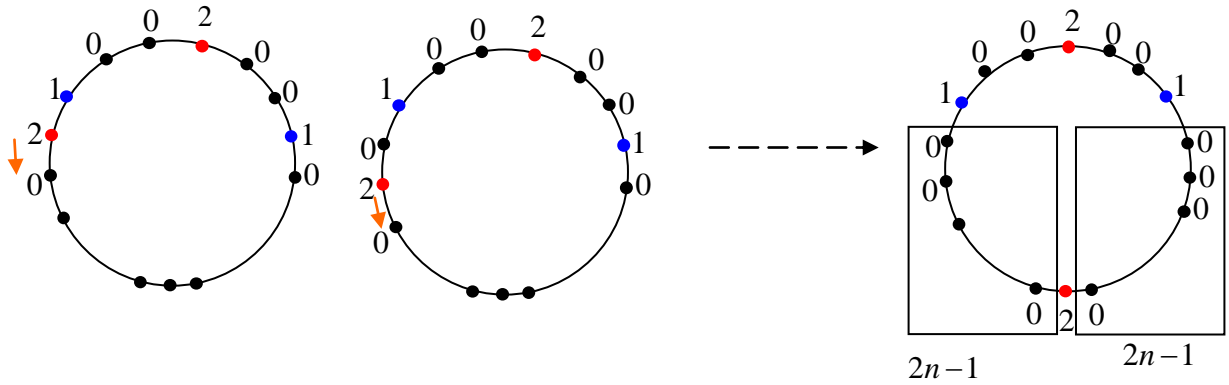
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 4 özdeş siyah boncuk alırsak



$4n - 1$ farklı durum vardır.



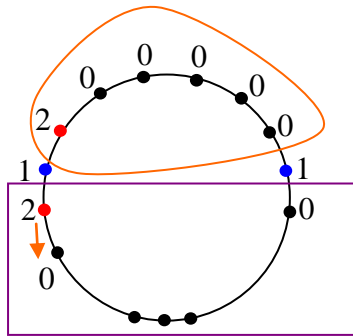
$4n - 1$ farklı durum vardır.



$2n$ tane farklı durum vardır.

Oluşan durum sayısı: $2 \cdot (4n - 1) + (2n) = 10n - 2$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 5 özdeş siyah boncuk alırsak

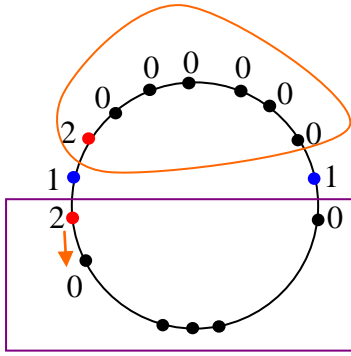


Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 200000 \\ 002000 \end{array} \right\} 3 \text{ farklı durum}$

Her duruma karşın alt kısmın (mor) $\underbrace{200 \dots 00}_{4n-3}$ 2 sayısı $(4n - 2)$ farklı konumda bulunabilir.

Oluşan durum sayısı: $3 \cdot (4n - 2)$ tanedir.

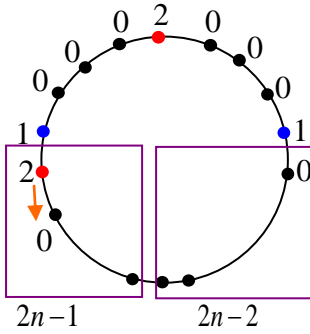
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 6 özdeş siyah boncuk alırsak



Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 2000000 \\ 0200000 \\ 0020000 \end{array} \right\}$ (3 tane farklı durumlarında)

alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{4n-4}$ 2 sayısı $(4n-3)$ farklı konumda
buluna bilir. bu şekilde oluşacak durum sayısı: $3.(4n-3)$

Üst Kısım (Turuncu) 0002000 olma durumunda simetriden dolayı alt kısmın (mor) $2n-1$ farklı durumu vardır.



Oluşan toplam durum sayısı: $3.(4n-3) + (2n-1)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 7 özdeş siyah boncuk alırsak
Benzer olarak;

Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 20000000 \\ 02000000 \\ 00200000 \\ 00020000 \end{array} \right\}$ 4 farklı durum

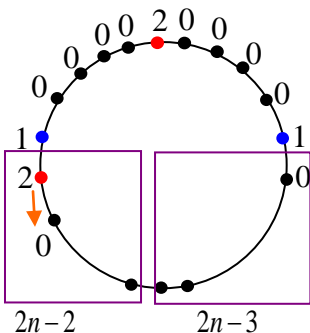
Her duruma karşın alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{4n-5}$ 2 sayısı $(4n-4)$ farklı konumda buluna bilir.

Oluşan durum sayısı: $4.(4n-4)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve 8 özdeş siyah boncuk alırsak
Benzer olarak;

Üst Kısım (Turuncu) : $\left. \begin{array}{l} 200000000 \\ 020000000 \\ 002000000 \\ 000200000 \end{array} \right\}$ (4 tane farklı) durumlarında

alt kısmın (mor) $\underbrace{200\dots 00}_{4n-6}$ 2 sayısı $(4n-5)$ farklı konumda buluna bilir. Bu şekilde oluşacak
durum sayısı: $4.(4n-5)$



Üst Kısım (Turuncu) 000020000 olma durumunda simetriden dolayı alt kısmın (mor) $2n-2$ farklı durumu vardır.

Oluşan toplam durum sayısı: $4.(4n-5) + (2n-2)$ tanedir.

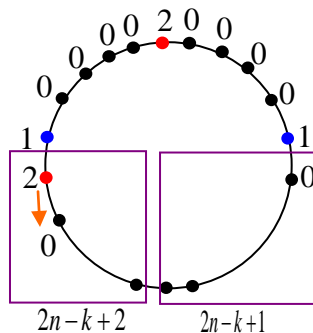
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve $2k$ ($k \in N$) tane özdeş siyah boncuk alırsak

Üst Kısım (Turuncu) :

$$\left. \begin{array}{l} 200..000...000 \\ 020..000...000 \\ \dots \\ 00...020...000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underbrace{\hspace{1cm}}_{k-1} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{k+1} \end{array} \text{ k tane farklı durum vardır.}$$

alt kısmın (**mor**) $\underbrace{200\dots 00}_{4n-2k+2}$ 2 sayısı $(4n-2k+3)$ farklı konumda bulunabilir. Bu şekilde

oluşacak durum sayısı: $k.(4n-2k+3)$ tanedir.



Üst Kısım (Turuncu) $\underbrace{00\dots00}_k \underbrace{200\dots00}_k$ olma durumunda simetriden dolayı alt kısmın (mor) $2n - k + 2$ farklı durumu vardır.

Oluşan toplam durum sayısı: $k.(4n-2k+3)+2n-k+2$ tanedir.

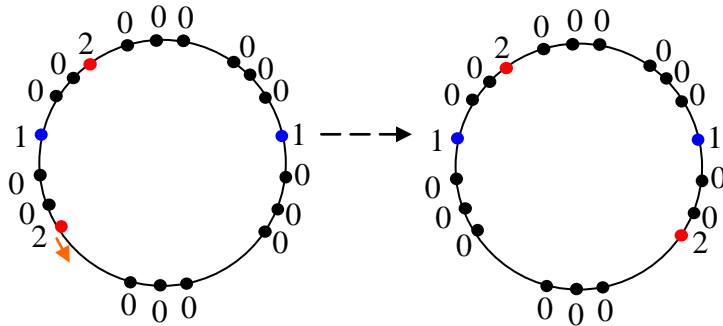
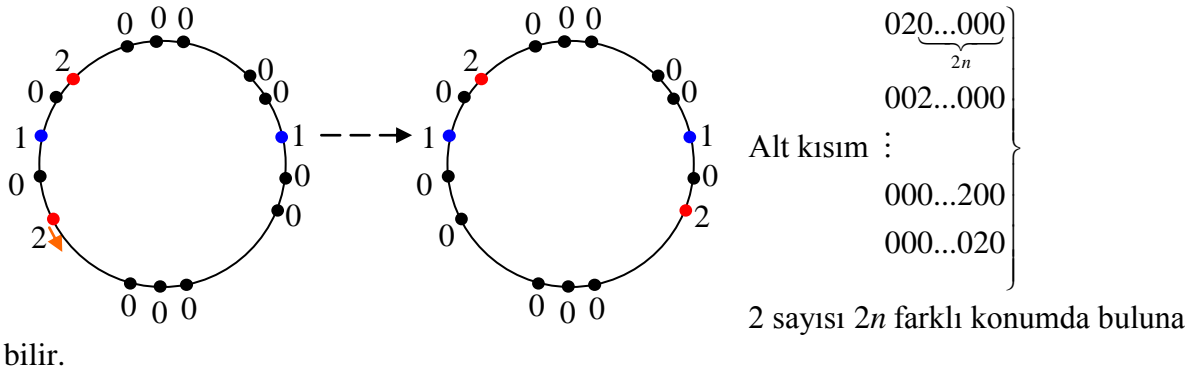
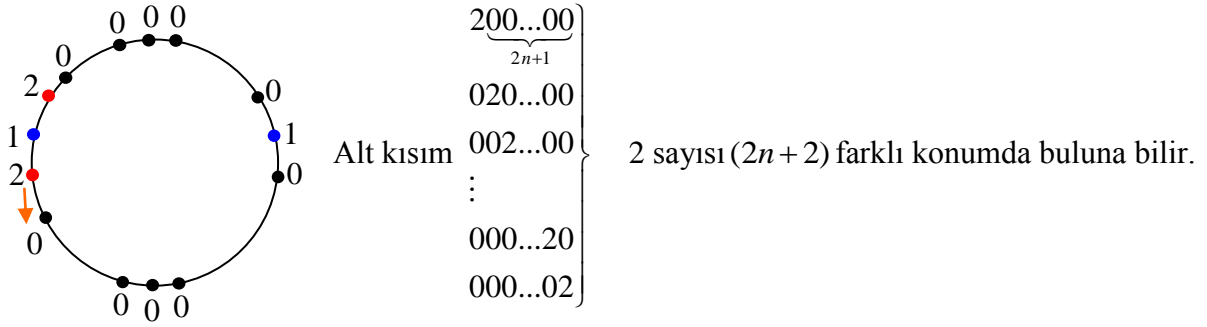
2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve $2k+1$ ($k \in N$) tane özdeş siyah boncuk alırsak Benzer olarak;

Üst Kısım (Turuncu) :

$$\left. \begin{array}{l} 200..000...000 \\ 020..000...000 \\ \dots \\ \underbrace{00...0}_{k} \underbrace{20...0}_{k+1} 000 \end{array} \right\} k+1 \text{ farklı durum vardır.}$$

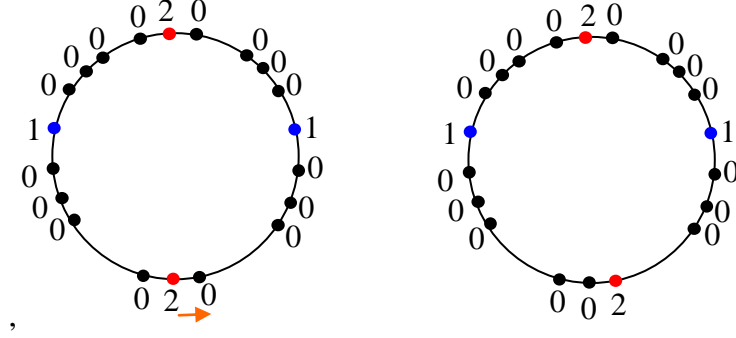
Her duruma karşın alt kısmın (mor) $\underbrace{200...00}_{4n-2k+1}$ 2 sayısı $(4n-2k+2)$ farklı konumda bulunabilir. Oluşacak durum sayısı : $(k+1)(4n-2k+2)$ tanedir.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı ve $2n+1$ tane özdeş siyah boncuk alırsak üst kısımdaki siyah boncuk sayısı ile alt kısımdaki siyah boncuk sayısı eşit olduğu durumu inceleyelim:



$$\left. \begin{array}{l} 0020 \dots 000 \\ 0002 \dots 000 \\ 000 \dots 2000 \\ 000 \dots 0200 \end{array} \right\} \text{Alt kısım :}$$

2 sayısı $2n-2$ farklı konumda buluna bilir.
Benzer olarak devam edersek son durum:



$$\left. \begin{array}{l} 000 \dots 0200 \dots 000 \\ 000 \dots 0020 \dots 000 \end{array} \right\} \text{Alt kısım}$$

olmak üzere 2 farklı durum vardır.

üst kısımdaki siyah boncuk sayısı ile alt kısımdaki siyah boncuk sayısı eşit olduğunda

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k = 2 \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} = n^2 + 3n + 2 \text{ farklı durum vardır.}$$

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı alıp özdeş siyah boncukları alarak elde ettiğimiz durumları tabloşturalım.

2 özdeş mavi boncuk arasına bir kırmızı alıp özdeş siyah boncukları alarak elde ettiğimiz durumlar:.		
Üst kısma alınan siyah boncuk sayısı	Simetrik olmayan durumlar	Simetrik olan durumlar
0	0	$2n+2$
1	$4n+2$	0
2	$4n+1$	$2n+1$
3	$2 \cdot (4n)$	0
4	$2 \cdot (4n-1)$	$2n$
5	$3 \cdot (4n-2)$	0
6	$3 \cdot (4n-3)$	$2n-1$
7	$4 \cdot (4n-4)$	0
8	$4 \cdot (4n-5)$	$2n-2$
\vdots	\vdots	\vdots
$2k$	$k \cdot (4n - 2k + 3)$	$2n - k + 2$
$2k+1$	$(k+1) \cdot (4n - 2k + 2)$	0

\vdots	\vdots	\vdots
$2n$	$n.(2n+3)$	$(n+2)$
$2n+1$ (özel durum)	$n^2 + 3n + 2$	

Elde ettiğimiz bütün durumları toplarsak.

$$F(2,2,4n+2) = 1 + \sum_{k=1}^{4n+2} F(1,2,k) + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1).(4n-2k+2) + \sum_{k=0}^n (k.(4n-2k+3) + (2n-k+2)) + (n^2 + 3n + 2)$$

buluruz.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1).(4n-2k+2) = \sum_{k=1}^n (k-1+1).(4n-2(k-1)+2) = \sum_{k=1}^n k.(4n-2k+4)$$

$$= \sum_{k=1}^n (4nk - 2k^2 + 4k) = 4.n.\frac{n.(n+1)}{2} - 2.\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} + 4.\frac{n.(n+1)}{2}$$

$$= \frac{6n^3 + 6n^2 - 2n^3 - 3n^2 - n + 6n^2 + 6n}{3} = \frac{4n^3 + 9n^2 + 5n}{3}$$

$$\sum_{k=0}^n (k.(4n-2k+3) + (2n-k+2)) = (2n+2) + \sum_{k=1}^n (4nk - 2k^2 + 2k + 2n + 2)$$

$$= (2n+2) + 4.n.\frac{n.(n+1)}{2} - 2.\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} + 2.\frac{n.(n+1)}{2} + 2n^2 + 2n$$

$$= \frac{6n + 6 + 6n^3 + 6n^2 - 2n^3 - 3n^2 - n + 3n^2 + 3n + 6n^2 + 6n}{3} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 14n + 6}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{4n+2} F(1,2,k) \text{ değerini bulalım.}$$

$$F(1,2,1) = 2, \quad F(1,2,2) = 4 \text{ olmak üzere}$$

$$\forall n \in N \text{ olmak üzere } F(1,2,2n+1) = n^2 + 3n + 2 \text{ dir.}$$

$$\forall n \in N^+ \text{ olmak üzere } F(1,2,2n) = n^2 + 2n + 1 \text{ dir.}$$

$$\sum_{k=1}^{4n+2} F(1,2,k) = \sum_{k=1}^{2n+1} F(1,2,2k) + \sum_{k=0}^{2n} F(1,2,2k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} F(1,2,2k) = \sum_{k=1}^{2n+1} (k^2 + 2k + 1) = \frac{(2n+1).(2n+2).(4n+3)}{6} + 2.\frac{(2n+1).(2n+2)}{2} + (2n+1)$$

$$= \frac{8n^3 + 18n^2 + 13n + 3}{3} + \frac{12n^2 + 18n + 6}{3} + \frac{6n + 3}{3}$$

$$= \frac{8n^3 + 30n^2 + 37n + 12}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{2n} F(1,2,2k+1) = \sum_{k=0}^{2n} (k^2 + 3k + 2) = 2 + \sum_{k=1}^{2n} (k^2 + 3k + 2)$$

$$= 2 + \frac{2n.(2n+1).(4n+1)}{6} + 3. \frac{2n.(2n+1)}{2} + 4n$$

$$= \frac{6+8n^3+6n^2+n+18n^2+9n+12n}{3} = \frac{8n^3+24n^2+22n+6}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{4n+2} F(1,2,k) = \sum_{k=1}^{2n+1} F(1,2,2k) + \sum_{k=0}^{2n} F(1,2,2k+1) = \frac{8n^3+30n^2+37n+12}{3} + \frac{8n^3+24n^2+22n+6}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{4n+2} F(1,2,k) = \frac{16n^3+54n^2+59n+18}{3}$$

Bulduğumuz eşitliklerini yerine yazarsak

$$F(2,2,4n+2) = 1 + \sum_{k=1}^{4n+2} F(1,2,k) + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1).(4n-2k+2) + \sum_{k=0}^n (k.(4n-2k+3) + (2n-k+2)) + (n^2+3n+2)$$

$$F(2,2,4n+2) = 1 + \frac{16n^3+54n^2+59n+18}{3} + \frac{4n^3+9n^2+5n}{3} + \frac{4n^3+12n^2+14n+6}{3} + (n^2+3n+2)$$

$$F(2,2,4n+2) = 8n^3+26n^2+29n+11 \text{ buluruz.}$$

Sonuç olarak ; $F(2,2,4n+2) = 8n^3+26n^2+29n+11$

$$n=0 \text{ için } F(2,2,2) = 11$$

$$n=1 \text{ için } F(2,2,6) = 8+26+29+11 = 74$$

$$n=2 \text{ için } F(2,2,10) = 8.2^3+26.2^2+29.2+11 = 237$$

$$n=3 \text{ için } F(2,2,14) = 8.3^3+26.3^2+29.3+11 = 548$$

$$n=4 \text{ için } F(2,2,18) = 8.4^3+26.4^2+29.4+11 = 1055$$

$$n=5 \text{ için } F(2,2,22) = 8.5^3+26.5^2+29.5+11 = 1806$$

⋮

$F(2,2,1) = 4$	$F(2,2,2) = 11$	$F(2,2,3) = 18$	$F(2,2,4) = 33$
$F(2,2,5) = 48$	$F(2,2,6) = 74$	$F(2,2,7) = 100$	$F(2,2,8) = 140$
$F(2,2,9) = 180$	$F(2,2,10) = 237$	$F(2,2,11) = 294$	$F(2,2,12) = 371$
$F(2,2,13) = 448$	$F(2,2,14) = 548$	$F(2,2,15) = 648$	$F(2,2,16) = 774$
$F(2,2,17) = 900$	$F(2,2,18) = 1055$	$F(2,2,19) = 1210$	$F(2,2,20) = 1397$
$F(2,2,21) = 1584$	$F(2,2,22) = 1806$	$F(2,2,23) = 2028$	$F(2,2,24) = 2288$
$F(2,2,25) = 2548$	$F(2,2,26) = 2849$	$F(2,2,27) = 3150$	$F(2,2,28) = 3495$
$F(2,2,29) = 3840$	$F(2,2,30) = 4232$	$F(2,2,31) = 4624$	$F(2,2,32) = 5066$
$F(2,2,33) = 5508$	$F(2,2,34) = 6003$	$F(2,2,35) = 6498$	$F(2,2,36) = 7049$
$F(2,2,37) = 7600$	$F(2,2,38) = 8210$	$F(2,2,39) = 8820$	$F(2,2,40) = 9492$
$F(2,2,41) = 10164$	$F(2,2,42) = 10901$	$F(2,2,43) = 11638$	$F(2,2,44) = 12443$

$F(2,2,45) = 13248$	$F(2,2,46) = 14124$	$F(2,2,47) = 15000$	$F(2,2,48) = 15950$
$F(2,2,49) = 16900$	$F(2,2,50) = 17927$	$F(2,2,51) = 18954$	$F(2,2,52) = 20061$
$F(2,2,53) = 21168$	$F(2,2,54) = 22358$	$F(2,2,55) = 23548$	$F(2,2,56) = 24824$